Gemengde opgaven

5 Exponenten en logaritmen

bladzijde 158

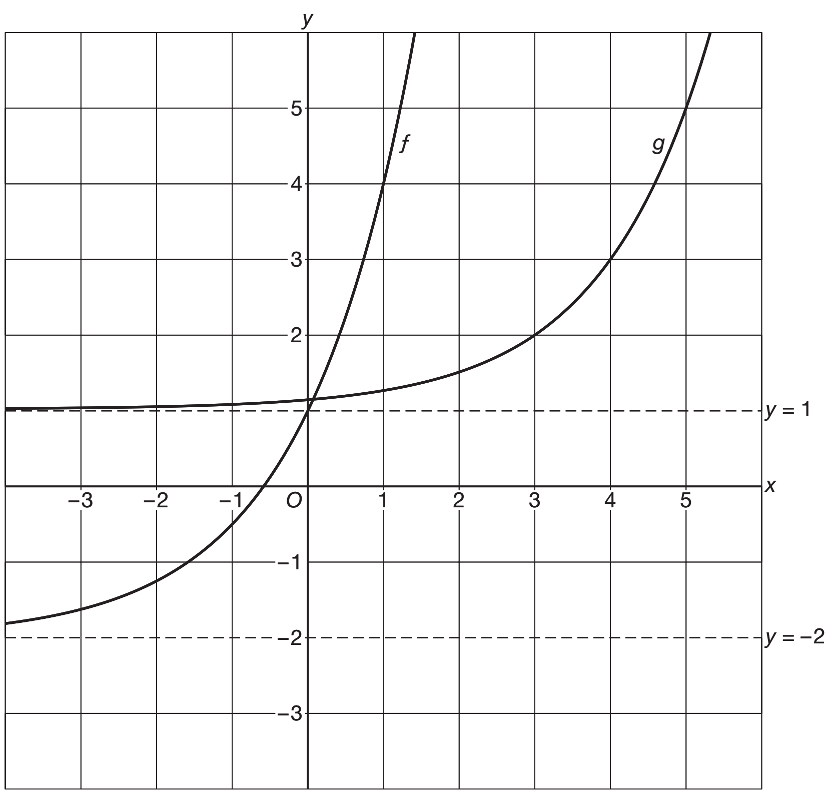
1 **a** $y = 2^x$
$\downarrow$ verm. x-as, 3
$y = 3 \cdot 2^x$
$\downarrow$ translatie $(0, -2)$
$f(x) = 3 \cdot 2^x - 2$

$y = 2^x$
$\downarrow$ translatie $(3, 1)$
$g(x) = 2^{x-3} + 1$

b Voer in $y_1 = 3 \cdot 2^x - 2$ en $y_2 = 2^{x-3} + 1$.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$-1{,}6$	$-1{,}3$	$-0{,}5$	1	4	10

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	$1{,}1$	$1{,}1$	$1{,}3$	$1{,}5$	2	3	5	9



$B_f = \langle -2, \rightarrow \rangle$
$B_g = \langle 1, \rightarrow \rangle$

c De optie intersect geeft $x \approx 0{,}06$ en $y \approx 1{,}13$, dus het snijpunt is $(0{,}06; 1{,}13)$.

224968 GO.indd 128 01-11-2007 11:26:56

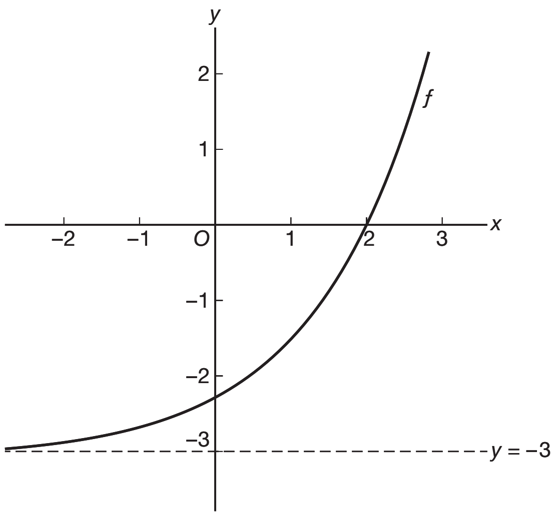
d $f(x) = -\frac{1}{2}$ geeft $3 \cdot 2^x - 2 = -\frac{1}{2}$
$3 \cdot 2^x = 1\frac{1}{2}$
$2^x = \frac{1}{2}$
$2^x = 2^{-1}$
$x = -1$

e $g(7) = 2^4 + 1 = 16 + 1 = 17$
Voor $x \leq 7$ is $1 < g(x) \leq 17$.

f Voer in $y_3 = 9$.
De optie intersect met y_1 en y_3 geeft $x_A \approx 1{,}874$.
De optie intersect met y_2 en y_3 geeft $x_B = 6$.
$AB \approx 6 - 1{,}874 \approx 4{,}13$

2 **a** $g(x) = -\frac{3}{4}$ geeft $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} - 1 = -\frac{3}{4}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} = \frac{1}{4}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$
$x - 5 = 2$
$x = 7$

b $f(2) = 3 \cdot 2^0 - 3 = 0$



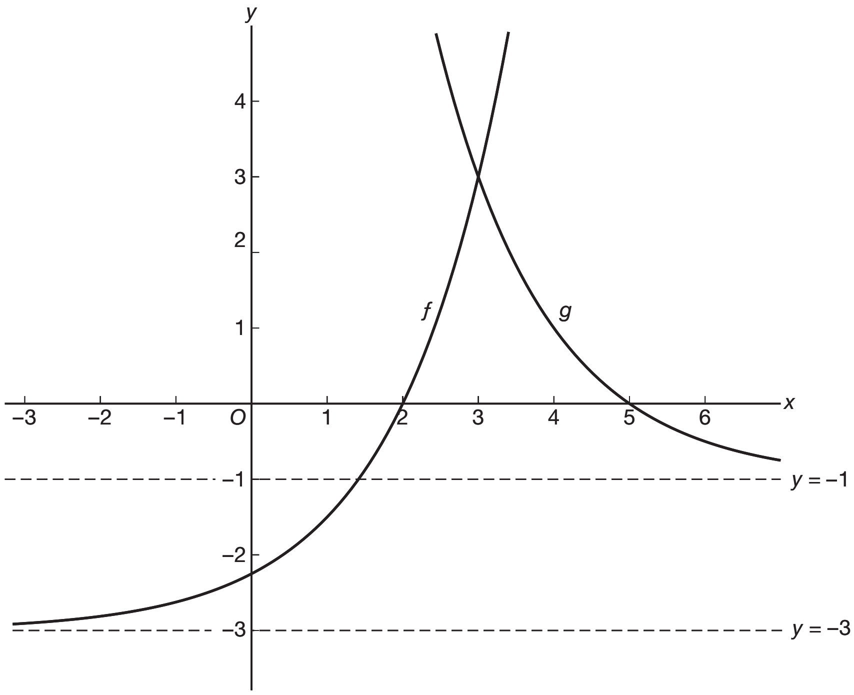
Voor $x \leq 2$ is $-3 < f(x) \leq 0$.

c $f(-1) = 3 \cdot 2^{-3} - 3 = \frac{3}{8} - 3 = -2\frac{5}{8}$
$g(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} - 1 = 64 - 1 = 63$
$AB = 63 - -2\frac{5}{8} = 65\frac{5}{8}$

d Voer in $y_1 = 3 \cdot 2^{x-2} - 3$, $y_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} - 1$ en $y_3 = 4$.
De optie intersect met y_1 en y_3 geeft $x_P \approx 3{,}222$.
De optie intersect met y_2 en y_3 geeft $x_Q \approx 2{,}678$.
$PQ \approx 3{,}222 - 2{,}678 \approx 0{,}54$

224968 GO.indd 129 01-11-2007 11:26:59

e



De horizontale lijn $y = p$ moet de grafiek van f snijden en de grafiek van g niet.
Dit is het geval voor $-3 < p \leq -1$.

3 **a** $30 - 3^{3x+1} = 3$

$-3^{3x+1} = -27$

$3^{3x+1} = 3^3$

$3x + 1 = 3$

$3x = 2$

$x = \frac{2}{3}$

b $5 \cdot 3^{2x} = 15 \cdot \sqrt[4]{3}$

$3^{2x} = 3 \cdot \sqrt[4]{3}$

$3^{2x} = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{4}}$

$3^{2x} = 3^{1\frac{1}{4}}$

$2x = 1\frac{1}{4}$

$x = \frac{5}{8}$

c $4 \cdot {}^3\log(3x - 5) = 20$

${}^3\log(3x - 5) = 5$

$3x - 5 = 3^5$

$3x - 5 = 243$

$3x = 248$

$x = 82\frac{2}{3}$

d $6 - {}^{0,5}\log(3x) = 8$

$-{}^{0,5}\log(3x) = 2$

${}^{0,5}\log(3x) = -2$

$3x = 0{,}5^{-2}$

$3x = 4$

$x = 1\frac{1}{3}$

e $2^{x^2-2} = 32$

$2^{x^2-2} = 2^5$

$x^2 - 2 = 5$

$x^2 = 7$

$x = \sqrt{7} \;\vee\; x = -\sqrt{7}$

f $2 + 3 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(6x + 1) = -4$

$3 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(6x + 1) = -6$

${}^{\frac{1}{2}}\log(6x + 1) = -2$

$6x + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$6x + 1 = 4$

$6x = 3$

$x = \frac{1}{2}$

g $2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 5 = 59$

$2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = 54$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = 27$

$\left(3^{-1}\right)^{x-1} = 3^3$

$3^{-x+1} = 3^3$

$-x + 1 = 3$

$-x = 2$

$x = -2$

h $4^{3x+1} = \frac{1}{8}\sqrt{2}$

$\left(2^2\right)^{3x+1} = 2^{-3} \cdot 2^{\frac{1}{2}}$

$2^{6x+2} = 2^{-2\frac{1}{2}}$

$6x + 2 = -2\frac{1}{2}$

$6x = -4\frac{1}{2}$

$x = -\frac{3}{4}$

4 **a** $5^{1-3x} = \frac{1}{5} \cdot \sqrt[3]{25}$

$5^{1-3x} = 5^{-1} \cdot 5^{\frac{2}{3}}$

$5^{1-3x} = 5^{-\frac{1}{3}}$

$1 - 3x = -\frac{1}{3}$

$-3x = -1\frac{1}{3}$

$x = \frac{4}{9}$

b $4^{3x-x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}$

$\left(2^2\right)^{3x-x^2} = \left(2^{-1}\right)^{3-x}$

$2^{6x-2x^2} = 2^{-3+x}$

$6x - 2x^2 = -3 + x$

$-2x^2 + 5x + 3 = 0$

$2x^2 - 5x - 3 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot -3 = 49$ dus $\sqrt{D} = 7$

$x = \dfrac{5-7}{4} \vee x = \dfrac{5+7}{4}$

$x = -\frac{1}{2} \vee x = 3$

c $3^{x-3} + 3^{x-4} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

$3^x \cdot 3^{-3} + 3^x \cdot 3^{-4} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

$\frac{1}{27} \cdot 3^x + \frac{1}{81} \cdot 3^x = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

$\frac{4}{81} \cdot 3^x = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

$3^x = 27\sqrt{3}$

$3^x = 3^{3\frac{1}{2}}$

$x = 3\frac{1}{2}$

d $3 - {}^2\log(x-5) = 1$

$-{}^2\log(x-5) = -2$

${}^2\log(x-5) = 2$

$x - 5 = 4$

$x = 9$

e $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} = 9^{2x-5}$

$\left(3^{-1}\right)^{x+2} = \left(3^2\right)^{2x-5}$

$3^{-x-2} = 3^{4x-10}$

$-x - 2 = 4x - 10$

$-5x = -8$

$x = 1\frac{3}{5}$

f $2^{x+2} - 2^{x-1} = 14\sqrt{2}$

$2^x \cdot 2^2 - 2^x \cdot 2^{-1} = 14\sqrt{2}$

$4 \cdot 2^x - \frac{1}{2} \cdot 2^x = 14\sqrt{2}$

$3\frac{1}{2} \cdot 2^x = 14\sqrt{2}$

$2^x = 4\sqrt{2}$

$2^x = 2^{2\frac{1}{2}}$

$x = 2\frac{1}{2}$

g $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+2} + 2^{x+3} = 4\frac{1}{8}$

$\left(2^{-1}\right)^{-x+2} + 2^x \cdot 2^3 = 4\frac{1}{8}$

$2^{x-2} + 8 \cdot 2^x = 4\frac{1}{8}$

$2^x \cdot 2^{-2} + 8 \cdot 2^x = 4\frac{1}{8}$

$\frac{1}{4} \cdot 2^x + 8 \cdot 2^x = 4\frac{1}{8}$

$8\frac{1}{4} \cdot 2^x = 4\frac{1}{8}$

$2^x = \frac{1}{2}$

$2^x = 2^{-1}$

$x = -1$

h $5 - 3 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log\left(x^2\right) = -1$

$-3 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log\left(x^2\right) = -6$

${}^{\frac{1}{3}}\log\left(x^2\right) = 2$

$x^2 = \frac{1}{9}$

$x = \frac{1}{3} \vee x = -\frac{1}{3}$

5 **a** $g_{\text{jaar}} = 1{,}096$

$g_{10\text{ jaar}} = 1{,}096^{10} \approx 2{,}50$

De toename is 150% per 10 jaar.

b $g_{\text{maand}} = 1{,}096^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}008.$

De toename per maand is 0,8%.

c $1{,}096^T = 2$

$T = \dfrac{\log(2)}{\log(1{,}096)} \approx 7{,}56$ jaar

De verdubbelingstijd is 7 jaar en 7 maanden.

d $1{,}096^t = 10$

$t = \dfrac{\log(10)}{\log(1{,}096)} \approx 25{,}12$

Na 25 jaar is de hoeveelheid vertienvoudigd.

6 **a** $g_{\text{dag}} = 0{,}83$

$g_{\text{week}} = 0{,}83^7 \approx 0{,}271$

De afname is 72,9% per week.

b $g_{\text{uur}} = 0{,}83^{\frac{1}{24}} \approx 0{,}992$

De afname is 0,8% per uur.

c $0{,}83^T = \frac{1}{2}$

$T = \dfrac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log\left(0{,}83\right)} \approx 3{,}72$

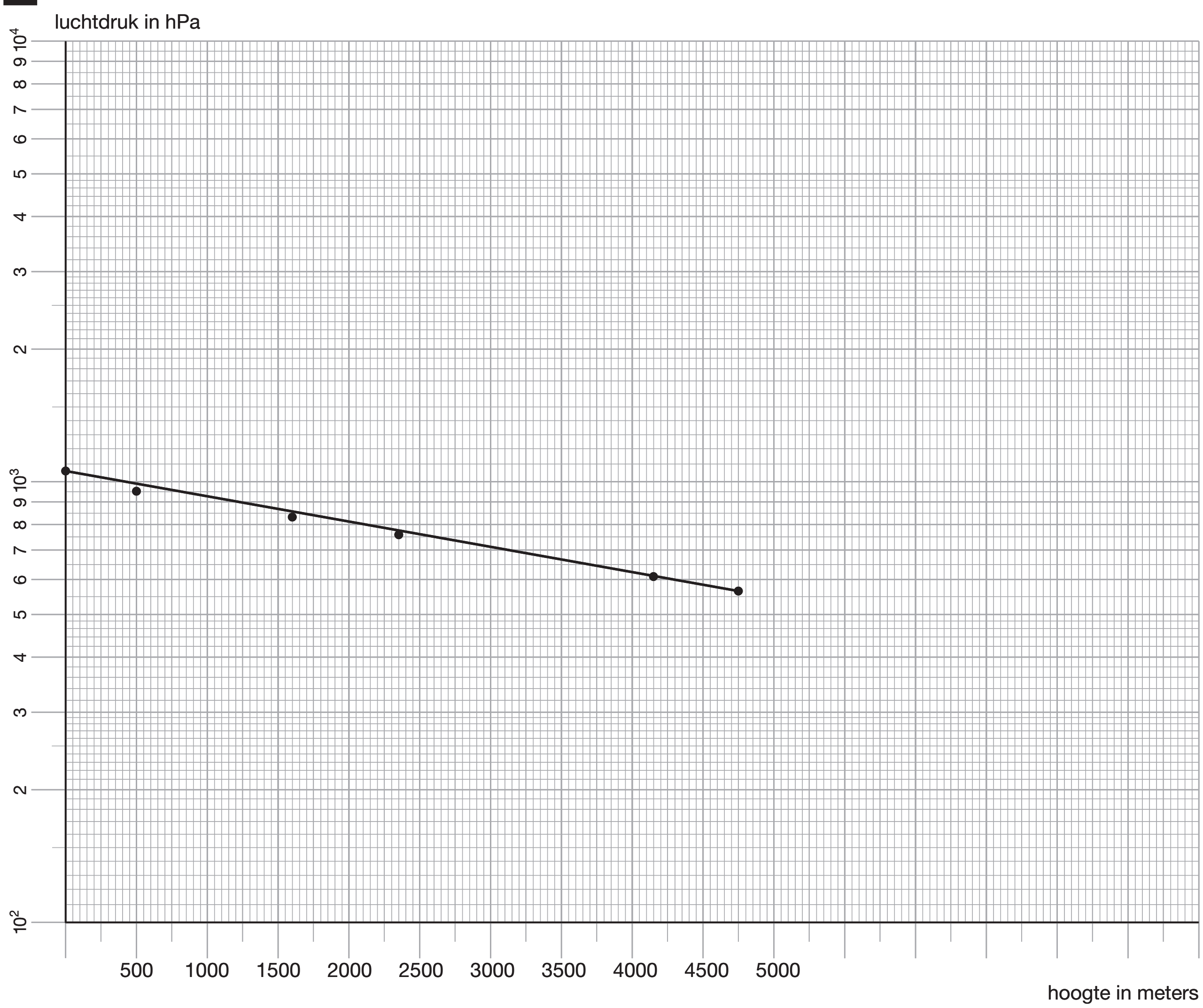
De halveringstijd is 3 dagen en 17 uur.

d $0{,}83^t = 0{,}25$

$t = \dfrac{\log(0{,}25)}{\log(0{,}83)} \approx 7{,}44$

Na 7 dagen en 11 uur is nog een kwart van de beginhoeveelheid over.

7 **a**



De punten liggen vrijwel op een rechte lijn, dus een exponentieel verband.

b $P = b \cdot g^h$

lijn door (0, 1013) en (4,750; 567), dus $g = \left(\dfrac{567}{1013}\right)^{\frac{1}{4{,}750}} \approx 0{,}885$

$\left.\begin{array}{l}\text{dus } P = b \cdot 0{,}885^h \\ \text{voor } h = 0 \text{ is } P = 1013\end{array}\right\} P = 1013 \cdot 0{,}885^h$

c $g_{\text{km}} = 0{,}885$

$g_{200\text{ m}} = 0{,}885^{\frac{1}{5}} \approx 0{,}976$

De afname is 2,4% per 200 m.

d $h = 7{,}5$ geeft $P = 1013 \cdot 0{,}885^{7{,}5} \approx 405$ hPa.

8 **a** $x + 4 > 0$ geeft $x > -4$, dus $D_f = \langle -4, \rightarrow\rangle$.

$x - 1 > 0$ geeft $x > 1$, dus $D_g = \langle 1, \rightarrow\rangle$.

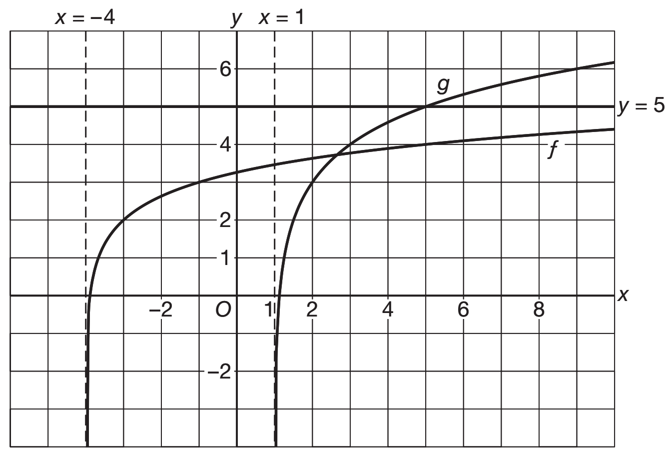
Bij f is de verticale asymptoot $x = -4$.

Bij g is de verticale asymptoot $x = 1$.

b Voer in $y_1 = 2 + \log(x + 4)/\log(3)$ en $y_2 = 3 + \log(x - 1)/\log(2)$.

x	-3	-1	1	3	5
$f(x)$	2	3	3,5	3,8	4

x	2	3	5	9
$g(x)$	3	4	5	6



c De optie intersect geeft $x \approx 2{,}65$.
$f(x) \geq g(x)$ geeft $1 < x \leq 2{,}65$

d $f(x) = 5$ geeft $2 + {}^{3}\log(x + 4) = 5$

$${}^{3}\log(x + 4) = 3$$
$$x + 4 = 27$$
$$x = 23$$

$f(x) \leq 5$ geeft $-4 < x \leq 23$

e $f(6) \approx 4{,}096$ en $g(6) \approx 5{,}322$
$AB \approx 5{,}322 - 4{,}096 \approx 1{,}23$

f $f(x) = 2$ geeft $2 + {}^{3}\log(x + 4) = 2$

$${}^{3}\log(x + 4) = 0$$
$$x + 4 = 1$$
$$x = -3$$

$g(x) = 2$ geeft $3 + {}^{2}\log(x - 1) = 2$

$${}^{2}\log(x - 1) = -1$$
$$x - 1 = \tfrac{1}{2}$$
$$x = 1\tfrac{1}{2}$$

$PQ = 1\tfrac{1}{2} - -3 = 4\tfrac{1}{2}$

bladzijde 160

9 **a** Van 1 mei tot 21 mei zijn 20 dagen.
Van 21 mei tot en met 31 mei zijn 11 dagen.
Op 31 mei zijn er $1{,}05^{20} \cdot 0{,}92^{11} \approx 1{,}06$ miljoen bacteriën.

b Noem de groeifactor per dag vanaf 21 mei g.
Er geldt $1{,}05^{20} \cdot g^{11} = 1$

$$g^{11} = \frac{1}{1{,}05^{20}}$$

$$g = \left(\frac{1}{1{,}05^{20}}\right)^{\frac{1}{11}} \approx 0{,}915$$

Dus afname met 8,5% per dag.

c Stel toename n dagen, dan is er $31 - n$ dagen afname.
Er geldt $1{,}05^{n} \cdot 0{,}9^{31-n} = 1$.
Voer in $y_1 = 1{,}05^{x} \cdot 0{,}9^{31-x}$ en $y_2 = 1$.
De optie intersect geeft $x \approx 21{,}2$.
Hierbij hoort 22 mei.

10 **a** $g_{mm} = 0{,}7$, dus $g_{5\ mm} = 0{,}7^5 \approx 0{,}168$.
Door de plaat van 5 mm komt 16,8% van het oorspronkelijke licht.
b $g_{cm} = 0{,}7^{10} \approx 0{,}028$
Er wordt dus 97,2% geabsorbeerd.
c $0{,}7^x = 0{,}01$
$$x = \frac{\log(0{,}01)}{\log(0{,}7)} \approx 12{,}9$$
De plaat moet 13 mm dik zijn.

11 **a** $g_{week} = 0{,}3$
$g_{dag} = 0{,}3^{\frac{1}{7}} \approx 0{,}842$
De groeifactor per 24 uur is dus ongeveer 0,842.
b Er is nog 60% van de toegediende hoeveelheid medicijn over dus
$0{,}842^t = 0{,}6$.
$$t = \frac{\log(0{,}6)}{\log(0{,}842)} \approx 2{,}97 \text{ dagen} \approx 71 \text{ uur}$$
c De hoeveelheid medicijn in het bloed van de patiënt wordt gegeven door de formule
$M = 500 \cdot 0{,}842^t$. Hierin is t in dagen en M in mg.
Voer in $y_1 = 500 \cdot 0{,}842^x$.
$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2} \approx -61 \text{ mg/dag} \approx -2{,}5 \text{ mg/uur}$$
De hoeveelheid medicijn neemt af met een snelheid van 2,5 mg/uur.

d Op $t = 7$ vlak voor de inname is $M = 0{,}3 \cdot 500 = 150$.
Op $t = 7$ vlak na de inname is $M = 150 + 500 = 650$.
Op $t = 10$ is $M = 650 \cdot 0{,}842^3 \approx 388$ mg.
e Op $t = 14$ vlak voor de inname is $M = 0{,}3 \cdot 650 = 195$.
Op $t = 14$ vlak na de inname is $M = 195 + 500 = 695$.
$$\left.\begin{array}{l} M = b \cdot 0{,}842^t \\ \text{voor } t = 14 \text{ is } M = 695 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 695 = b \cdot 0{,}842^{14} \\ \dfrac{695}{0{,}842^{14}} = b \\ 7720 \approx b \end{array}$$
Dus $M(t) = 7720 \cdot 0{,}842^t$.

12 **a** Voor $x = 18$ is $P = 100$ dus $100 = a \log(19)$
$$a = \frac{100}{\log(19)} \approx 78{,}201$$
b Voer in $y_1 = 78 \log(x + 1)$ en $y_2 = 75$.
De optie intersect geeft $x \approx 8{,}15$.
Dus op stand 8,2.
c $k = -1{,}3$ geeft $x = \frac{1{,}7}{6} \cdot 18 = 5{,}1$
$P = 78 \log(5{,}1 + 1) \approx 61{,}2$
Dus P is ongeveer 61%.