14 Algebraïsche vaardigheden

bladzijde 164

27 **a** $\dfrac{x^2-5x+4}{x+1}=x+1$

$x^2-5x+4=(x+1)^2$
$x^2-5x+4=x^2+2x+1$
$-7x=-3$
$x=\frac{3}{7}$

b $(\sin(x)-3)^4=(2\sin(x)-4)^4$

$\sin(x)-3=2\sin(x)-4 \vee \sin(x)-3=-2\sin(x)+4$
$-\sin(x)=-1 \vee 3\sin(x)=7$
$\sin(x)=1 \vee \sin(x)=\frac{7}{3}$

$x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$ geen oplossing

Dus $x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$.

c $\dfrac{e^x}{e^x+2}=\dfrac{2e^x}{3e^x-1}$

$e^x(3e^x-1)=2e^x(e^x+2)$
$3e^x-1=2(e^x+2)$
$3e^x-1=2e^x+4$
$e^x=5$
$x=\ln(5)$

d $(2\ln(x)-1)(3\ln^2(x)-10)=4\ln(x)-2$
$(2\ln(x)-1)(3\ln^2(x)-10)=2(2\ln(x)-1)$
$2\ln(x)-1=0 \ \vee\ 3\ln^2(x)-10=2$
$2\ln(x)=1 \ \vee\ 3\ln^2(x)=12$
$\ln(x)=\frac{1}{2} \ \vee\ \ln^2(x)=4$
$x=e^{\frac{1}{2}} \ \vee\ \ln(x)=2 \ \vee\ \ln(x)=-2$
$x=e^{\frac{1}{2}} \ \vee\ x=e^2 \ \vee\ x=e^{-2}$
$x=\sqrt{e} \ \vee\ x=e^2 \ \vee\ x=\frac{1}{e^2}$

28 **a** $y=\frac{10^x}{10^x-1}\left(10^x-\frac{1}{10^x}\right)=\frac{10^x}{10^x-1}\cdot\frac{10^{2x}-1}{10^x}=\frac{10^{2x}-1}{10^x-1}=\frac{(10^x+1)(10^x-1)}{10^x-1}=10^x+1$

Dus $y=10^x+1$.

b $y=\dfrac{10-\frac{2x}{x+3}}{5+\frac{2}{x+3}}=\frac{10(x+3)-2x}{5(x+3)+2}=\frac{10x+30-2x}{5x+15+2}=\frac{8x+30}{5x+17}$

Dus $y=\frac{8x+30}{5x+17}$.

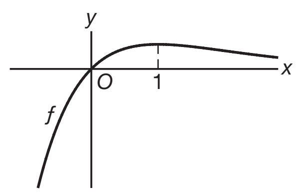
c $P=\dfrac{\frac{2}{a}-\frac{3}{a+1}}{1-a}=\frac{2(a+1)-3a}{a(a+1)(1-a)}=\frac{2a+2-3a}{a(a+1)(1-a)}=\frac{2-a}{a(a+1)(1-a)}$

Dus $P=\frac{2-a}{a(a+1)(1-a)}$.

d $P=\dfrac{\frac{5}{a}+\frac{6}{b}}{2b-\frac{3}{a}}=\frac{5b+6a}{2ab^2-3b}$

Dus $P=\frac{5b+6a}{2ab^2-3b}$.

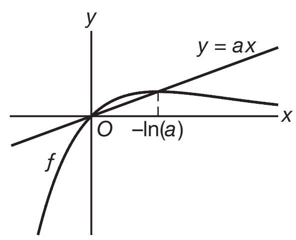
29 **a** $f(x)=x\cdot e^{-x}$ geeft $f'(x)=1\cdot e^{-x}+x\cdot e^{-x}\cdot -1=(1-x)e^{-x}$
$f'(x)=0$ geeft $(1-x)e^{-x}=0$
$1-x=0$
$x=1$



max. is $f(1)=1\cdot e^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

b $F(x)=(-x-1)e^{-x}$ geeft $F'(x)=-1\cdot e^{-x}+(-x-1)e^{-x}\cdot -1$
$=-e^{-x}+(x+1)e^{-x}=x\,e^{-x}=f(x)$
Dus $F(x)=(-x-1)e^{-x}$ is een primitieve van $f(x)$.

c $f(x)=ax$ geeft $x\,e^{-x}=ax$
$x=0 \ \vee\ e^{-x}=a$
$x=0 \ \vee\ -x=\ln(a)$
$x=0 \ \vee\ x=-\ln(a)$



$O(V)=\int_0^{-\ln(a)} f(x)\,dx=[(-x-1)e^{-x}]_0^{-\ln(a)}$
$=(\ln(a)-1)\cdot e^{\ln(a)}-(-e^0)=(\ln(a)-1)\cdot a+1=a\ln(a)-a+1$

30 **a** $\dfrac{a+b}{b+2}=\dfrac{3}{a}$

$a^2+ab=3b+6$
$ab-3b=-a^2+6$
$(a-3)b=-a^2+6$
$b=\dfrac{-a^2+6}{a-3}$

b $\dfrac{3x+2}{x-1}=\dfrac{6y+1}{y+3}$

$(3x+2)(y+3)=(x-1)(6y+1)$
$3xy+9x+2y+6=6xy+x-6y-1$
$-3xy+8y=-8x-7$
$3xy-8y=8x+7\ldots(1)$
$(3x-8)y=8x+7$
$y=\dfrac{8x+7}{3x-8}$

Uit (1) volgt $3xy-8x=8y+7$
$x(3y-8)=8y+7$
$x=\dfrac{8y+7}{3y-8}$

31 **a** $f(x)=(2x+1)\sqrt{x^2+1}$ geeft

$f'(x)=2\cdot\sqrt{x^2+1}+(2x+1)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x$
$=2\sqrt{x^2+1}+\dfrac{x(2x+1)}{\sqrt{x^2+1}}$
$=\dfrac{2(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{x(2x+1)}{\sqrt{x^2+1}}$
$=\dfrac{2x^2+2+2x^2+x}{\sqrt{x^2+1}}$
$=\dfrac{4x^2+x+2}{\sqrt{x^2+1}}$

b $G(x)=(px+q)\sqrt{x^2+1}$ geeft

$G'(x)=p\sqrt{x^2+1}+(px+q)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x$
$=\dfrac{p(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{px^2+qx}{\sqrt{x^2+1}}$
$=\dfrac{px^2+p+px^2+qx}{\sqrt{x^2+1}}$
$=\dfrac{2px^2+qx+p}{\sqrt{x^2+1}}$

$G'(x)=g(x)$ geeft $2p=2 \wedge q=1 \wedge p=1$
$p=1 \wedge q=1$

c $\int_0^{\sqrt{3}} g(x)\,\mathrm{d}x=[(x+1)\sqrt{x^2+1}]_0^{\sqrt{3}}=(\sqrt{3}+1)\sqrt{4}-1\sqrt{1}=2\sqrt{3}+2-1=1+2\sqrt{3}$

32 **a** $N = 2^{3t} \cdot 3^{2t-1} = (2^3)^t \cdot 3^{2t} \cdot 3^{-1} = 8^t \cdot (3^2)^t \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 8^t \cdot 9^t = \frac{1}{3} \cdot 72^t$

Dus $N = \frac{1}{3} \cdot 72^t$.

b $N = \dfrac{3^{2t-1}}{5^{t+1}} = \dfrac{3^{2t} \cdot 3^{-1}}{5^t \cdot 5} = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot 9^t}{5 \cdot 5^t} = \frac{1}{15} \cdot (\frac{9}{5})^t$

Dus $N = \frac{1}{15} \cdot (\frac{9}{5})^t$.

c $N = 15 \cdot 3^{0{,}6t+1}$

$15 \cdot 3^{0{,}6t+1} = N$

$3^{0{,}6t+1} = \frac{1}{15} N$

$\ln(3^{0{,}6t+1}) = \ln(\frac{1}{15} N)$

$(0{,}6t + 1)\ln(3) = \ln(\frac{1}{15}) + \ln(N)$

$0{,}6t + 1 = \dfrac{\ln(\frac{1}{15})}{\ln(3)} + \dfrac{\ln(N)}{\ln(3)}$

$0{,}6t = -1 + \dfrac{\ln(\frac{1}{15})}{\ln(3)} + \dfrac{\ln(N)}{\ln(3)}$

$t = \frac{5}{3}\left(-1 + \dfrac{\ln(\frac{1}{15})}{\ln(3)}\right) + \dfrac{5}{3\ln(3)} \cdot \ln(N)$

$t \approx -5{,}77 + 1{,}52\ln(N)$

Dus $t = -5{,}77 + 1{,}52\ln(N)$.

33 Stel $\left.\begin{array}{l} x_D = p \\ CD : DB = 1 : p \end{array}\right\} x_B = 3p$

$f_a(p) = f_a(3p)$ geeft $\dfrac{p}{2} + \dfrac{a}{p} = \dfrac{3p}{2} + \dfrac{a}{3p}$

$\dfrac{a}{p} - \dfrac{a}{3p} = \dfrac{3p}{2} - \dfrac{p}{2}$

$\dfrac{3a}{3p} - \dfrac{a}{3p} = \dfrac{2p}{2}$

$\dfrac{2a}{3p} = p$

$3p^2 = 2a$

$p^2 = \frac{2}{3}a$

$p = \sqrt{\frac{2}{3}a} \vee p = -\sqrt{\frac{2}{3}a}$

voldoet   voldoet niet

$\left.\begin{array}{l} O(OABC) = OA \cdot AB = 3p \cdot f_a(p) = 3p \cdot \left(\dfrac{p}{2} + \dfrac{a}{p}\right) = 1\frac{1}{2}p^2 + 3a \\ p = \sqrt{\frac{2}{3}a} \end{array}\right\} O(ABCD) = a + 3a = 4a$

34 **a** $\left.\begin{array}{l} T = -2{,}57\ln\left(\dfrac{87 - L}{63}\right) \\ L = 80 \end{array}\right\} T = -2{,}57\ln\left(\dfrac{87 - 80}{63}\right) = -2{,}57\ln(\frac{1}{9}) \approx 5{,}65$

Dus de leeftijd is ongeveer 5,65 jaar, ofwel 5 jaar en 8 maanden.

b $T = 10$ geeft $-2{,}57\ln\left(\dfrac{87 - L}{63}\right) = 10$

$\ln\left(\dfrac{87 - L}{63}\right) = -\dfrac{10}{2{,}57}$

$\ln\left(\dfrac{87 - L}{63}\right) \approx -3{,}891$

$\dfrac{87 - L}{63} \approx 0{,}0204$

$87 - L \approx 1{,}29$

$L \approx 85{,}7$

85,7 feet $\approx 85{,}7 \times 0{,}314$ meter $\approx 26{,}9$ meter

Dus de lengte is ongeveer 26,9 meter.

c $T = -2{,}57\ln\left(\frac{87 - L}{63}\right)$

$\ln\left(\frac{87 - L}{63}\right) = -\frac{1}{2{,}57}T \approx -3{,}891T$

$\frac{87 - L}{63} \approx e^{-3{,}891T}$

$87 - L \approx 63\,e^{-3{,}891T}$

$L \approx 87 - 63\,e^{-3{,}891T}$

Dus $L = 87 - 63\,e^{-3{,}89T}$.

35 $f(x) = x^2 - 8$ geeft $f'(x) = 2x$

$g_p(x) = \sqrt{2x + p}$ geeft $g_p'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x + p}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x + p}}$

loodrecht snijden geeft

$f(x) = g_p(x) \quad \wedge \; f'(x) \cdot g_p'(x) = -1$

$x^2 - 8 = \sqrt{2x + p} \quad \wedge \; 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{2x + p}} = -1$

$\sqrt{2x + p} = x^2 - 8$ substitueren in $2x \cdot \frac{1}{\sqrt{2x + p}} = -1$ geeft

$2x \cdot \frac{1}{x^2 - 8} = -1$

$2x = -(x^2 - 8)$

$2x = -x^2 + 8$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x - 2)(x + 4) = 0$

$x = 2 \;\vee\; x = -4$

$x = 2$ en $\sqrt{2x + p} = x^2 - 8$ geeft $\sqrt{4 + p} = -4$

geen oplossing

$x = -4$ en $\sqrt{2x + p} = x^2 - 8$ geeft $\sqrt{-8 + p} = 8$

$-8 + p = 64$

$p = 72$

Dus voor $p = 72$ snijden de grafieken elkaar loodrecht.

bladzijde 166

36 **a** $b = 0{,}018$ en $S = 58$ geeft $\frac{a + 0{,}018}{0{,}018a} = 58$

$a + 0{,}018 = 1{,}044a$

$-0{,}044a = -0{,}018$

$a \approx 0{,}41$

$b = 0{,}018$ en $S = 63$ geeft $\frac{a + 0{,}018}{0{,}018a} = 63$

$a + 0{,}018 = 1{,}134$

$-0{,}134a = -0{,}018$

$a \approx 0{,}13$

Het rechteroog kan tussen 0,13 m en 0,41 m scherp zien.

b $S = \frac{a + b}{ab}$

$abS = a + b$

$abS - a = b$

$a(bS - 1) = b$

$a = \frac{b}{bS - 1}$

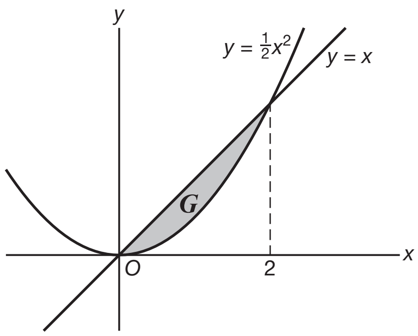
c $b = 0{,}017$ en $a = 0{,}15$ geeft $S = \dfrac{0{,}15 + 0{,}017}{0{,}15 \cdot 0{,}017} \approx 65{,}49$

Een grotere a geeft $S = \dfrac{a + 0{,}017}{0{,}017a} = \dfrac{1}{0{,}017} + \dfrac{1}{a}$.

Voor grote waarden van a nadert S tot $\dfrac{1}{0{,}017} \approx 58{,}82$.

Dus S kan de waarden 59 tot en met 65 aannemen.

37 **a**



$\frac{1}{2}x^2 = x$ geeft $x = 0 \vee \frac{1}{2}x = 1$

$x = 0 \vee x = 2$

$I = I_{\text{kegel}} - \int_0^2 \pi(\frac{1}{2}x^2)^2\,dx = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 2 - \int_0^2 \frac{1}{4}\pi x^4\,dx = \frac{8}{3}\pi - [\frac{1}{20}\pi x^5]_0^2 = \frac{8}{3}\pi - (\frac{1}{20}\pi \cdot 32 + 0) = 1\frac{1}{15}\pi$

b $y = \dfrac{1}{n}x^2$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{n}x$

$OQ_nP_nR_n$ is een vierkant, dus $\dfrac{1}{n}x^2 = x$

$x = 0 \vee \dfrac{1}{n}x = 1$

$x = 0 \vee x = n$

$\left.\begin{array}{l} x = n \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{n} \cdot x \end{array}\right\} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{n} \cdot n = 2$ en dit is onafhankelijk van n.

38 **a** $S(t) = 100$ geeft $200 - 180 \cdot e^{-0{,}29t} = 100$

$-180 \cdot e^{-0{,}29t} = -100$

$e^{-0{,}29t} = \frac{5}{9}$

$-0{,}29t = \ln(\frac{5}{9})$

$t = \dfrac{\ln(\frac{5}{9})}{-0{,}29} \approx 2{,}027$

$2{,}027$ uur is 2 uur en $0{,}027 \times 60 \approx 1{,}6$ minuut

Dus het opwarmen stopt na 2 uur en 2 minuten, dus om 17.02 uur.

b $S(t) = 200 - 180 \cdot e^{-0{,}29t}$ geeft $S'(t) = -180 \cdot e^{-0{,}29t} \cdot -0{,}29$

$S'(t) = 52{,}2\,e^{-0{,}29t}$

16.00 uur geeft $t = 1$

$S'(1) = 52{,}2 \cdot e^{-0{,}29} \approx 39{,}06$

39,06 graden per uur is 0,651 graden per minuut.

Dus de snelheid is 0,7 graden Celsius per minuut.

c $S = 200 - 180 \cdot e^{-0{,}29t}$

$180 \cdot e^{-0{,}29t} = 200 - S$

$e^{-0{,}29t} = \dfrac{200}{180} - \dfrac{1}{180}S$

$-0{,}29t = \ln(\frac{10}{9} - \frac{1}{180}S)$

$t = -\dfrac{\ln(\frac{10}{9} - \frac{1}{180}S)}{-0{,}29}$

$t \approx -3{,}45\ln(\frac{10}{9} - \frac{1}{180}S)$

Dus $t = -3{,}45\ln(\frac{10}{9} - \frac{1}{180}S)$.