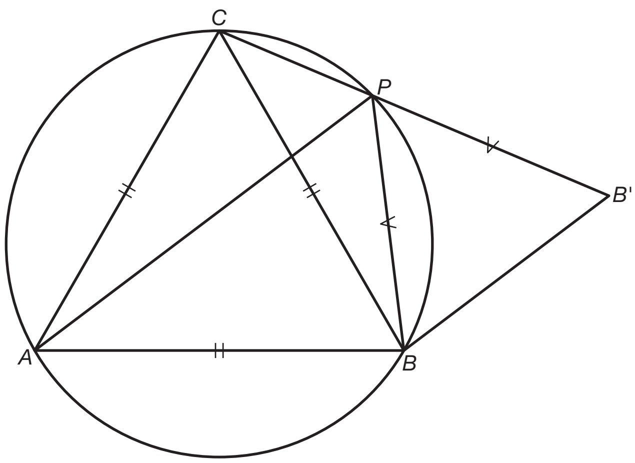
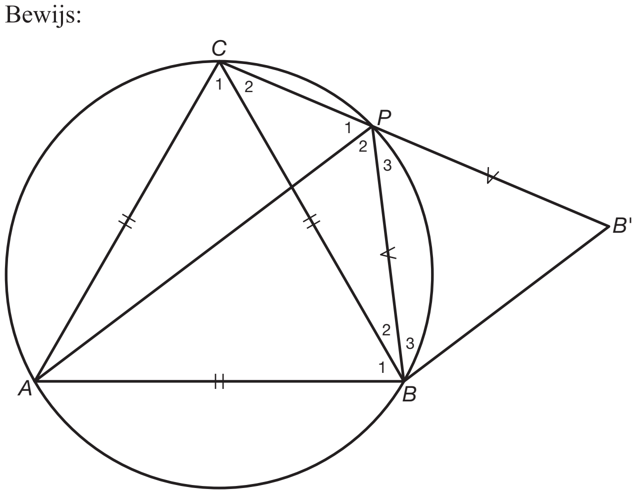
12 Bewijzen in de vlakke meetkunde

bladzijde 154

1 **a**



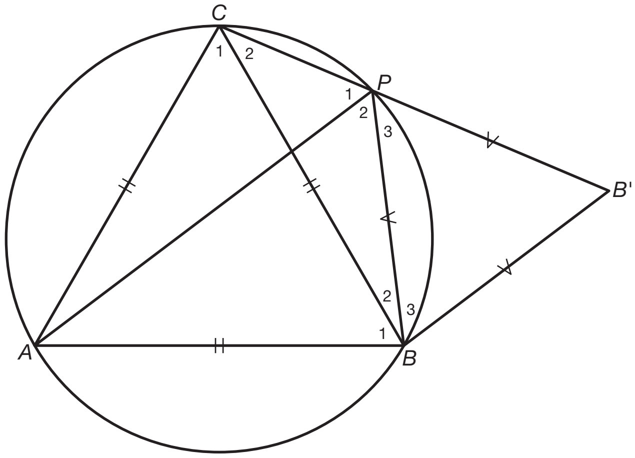
b Gegeven:
De gelijkzijdige driehoek ABC met zijn omgeschreven cirkel.
Punt P ligt op de kortste boog BC en B' ligt op het verlengde van CP zo, dat $PB' = PB$.
Te bewijzen:
Driehoek $BB'P$ is gelijkzijdig.
Bewijs:



$$\left.\begin{array}{l}\angle P_1 = \angle B_1 = 60^\circ \text{ (constante hoek)}\\ \angle P_2 = \angle C_1 = 60^\circ \text{ (constante hoek)}\\ \angle P_{123} = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)}\end{array}\right\} \angle P_3 = 60^\circ$$

Dus $\triangle BB'P$ is een gelijkbenige driehoek met een hoek van 60°, dus $\triangle BB'P$ is een gelijkzijdige driehoek.

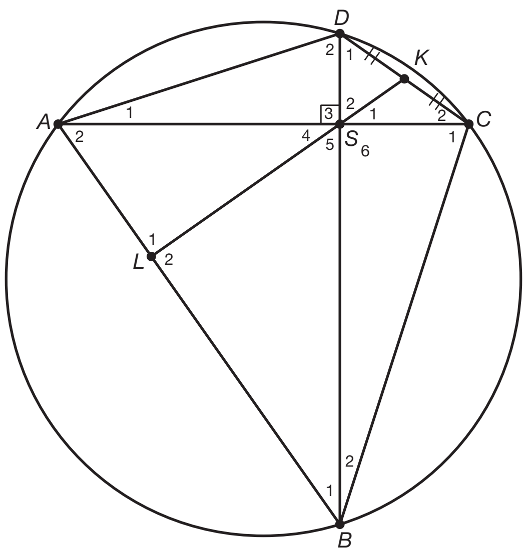
c Gegeven:
De gelijkzijdige driehoek ABC met zijn omgeschreven cirkel.
Punt P ligt op de kortste boog BC en B' ligt op het verlengde van CP zo, dat $PB' = PB$.
Te bewijzen:
$AP = BP + CP$
Bewijs:



$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\angle B_{12} = 60° + \angle B_2 \\ \angle B_{23} = 60° + \angle B_2\end{array}\right\} \angle B_{12} = \angle B_{23} \\ AB = BC \\ BP = BB' \end{array}\right\} \begin{array}{l}\triangle ABP \cong \triangle CBB' \text{ (ZHZ)} \\ \text{dus } AP = CB'\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} AP = CB' = CP + B'P \\ BP = B'P \end{array}\right\} AP = CP + BP$$

2 **a** Gegeven:
Koordenvierhoek $ABCD$ met $AC \perp BD$ en punt K op CD zo, dat $CK = DK$.
Het snijpunt van de diagonalen is S en punt L is het snijpunt van KS en AB.
Te bewijzen:
$\angle ASL = \angle KCS$
Bewijs:

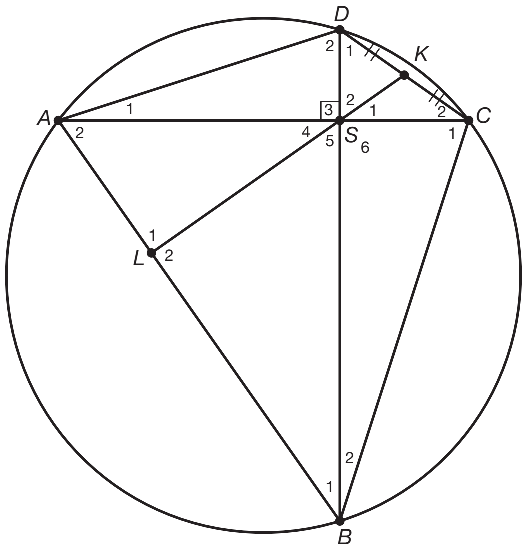


$\angle S_{12} = 90°$ en $CK = DK$, dus K is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle CDS$ (Thales).

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dus } KS = KC \text{ en hieruit volgt } \angle S_1 = \angle C_2. \\ \angle S_1 = \angle S_4 \text{ (overstaande hoeken)} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\angle C_2 = \angle S_4 \\ \text{ofwel } \angle KCS = \angle ASL\end{array}$$

b Gegeven:
Koordenvierhoek $ABCD$ met $AC \perp BD$ en punt K op CD zo, dat $CK = DK$.
Het snijpunt van de diagonalen is S en punt L is het snijpunt van KS en AB.
Te bewijzen:
$KL \perp AB$

Bewijs:

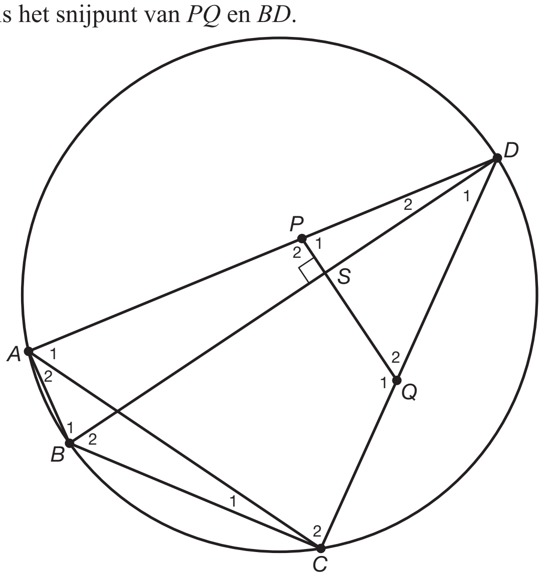


$\angle D_1 + \angle C_2 + \angle S_{12} = 180°$ (hoekensom driehoek)
$\angle S_{12} = 90°$
} $\angle D_1 + \angle C_2 = 90°$
$\angle D_1 = \angle A_2$ (constante hoek)
} $\angle A_2 + \angle C_2 = 90°$

$\angle A_2 + \angle C_2 = 90°$
$\angle C_2 = \angle S_4$ (onderdeel a)
} $\angle A_2 + \angle S_4 = 90°$
$\angle A_2 + \angle S_4 + \angle L_1 = 180°$ (hoekensom driehoek)
} $\angle L_1 = 90°$

Dus KL staat loodrecht op AB.

3 Gegeven:
Koordenvierhoek $ABCD$ waarbij BD middellijn is van de omgeschreven cirkel.
Punt P ligt op AD en punt Q op CD zo, dat $PQ \perp BD$.
Te bewijzen:
$PACQ$ is een koordenvierhoek.
Bewijs:
S is het snijpunt van PQ en BD.



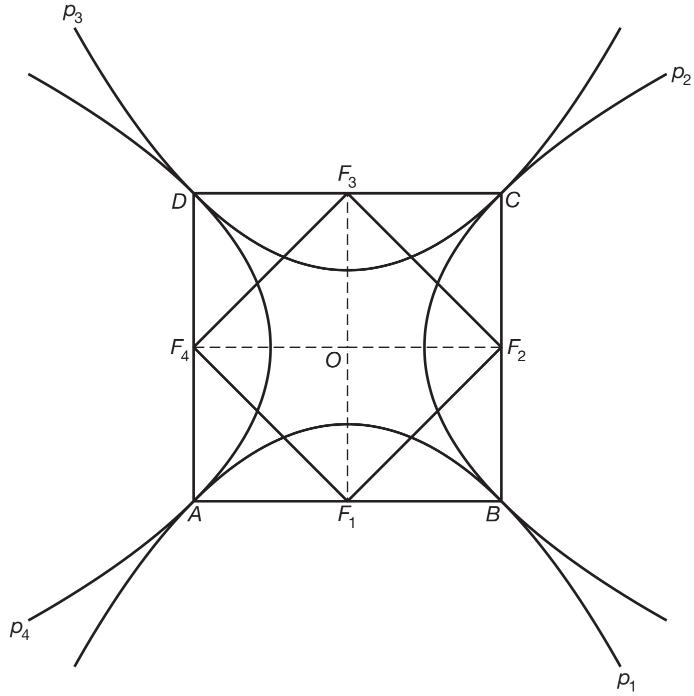
BD is middellijn, dus $\angle A_{12} = 90°$ (Thales)
$\angle S = 90°$
$\angle A_{12} + \angle B_1 + \angle S + \angle P_2 = 360°$ (hoekensom vierhoek)
} $\angle B_1 + \angle P_2 = 180°$
$\angle B_1 = \angle C_2$ (constante hoek)
} $\angle C_2 + \angle P_2 = 180°$

Dus $PACQ$ is een koordenvierhoek (koordenvierhoek).

bladzijde 155

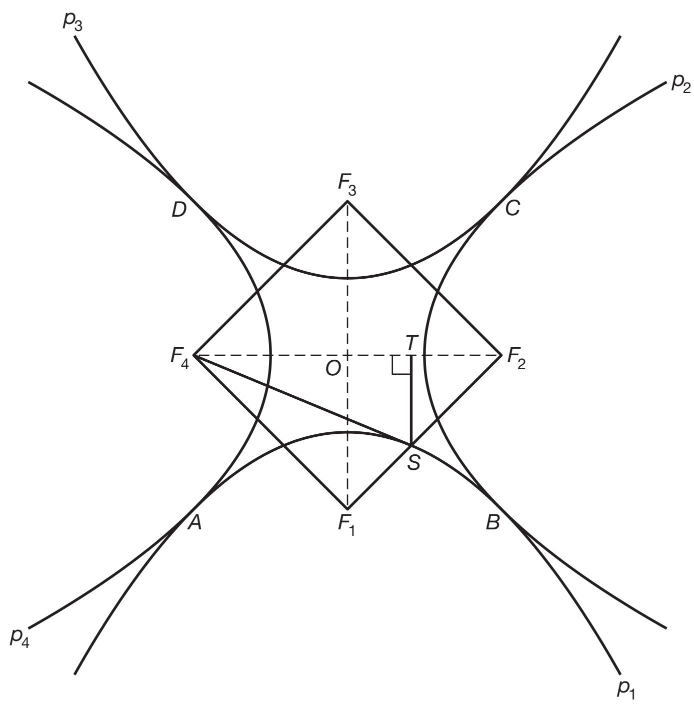
4 **a** Gegeven:
Zie opgave.
Te bewijzen:
p_1 en p_2 raken elkaar

Bewijs:
Teken vierkant $ABCD$ met AB door F_1 en $AB // F_2F_4$; BC door F_2 en $BC // F_1F_3$;
CD door F_3 en $CD // F_2F_4$ en AD door F_4 en $AD // F_1F_3$.
Het snijpunt van F_1F_3 en F_2F_4 is O.



$BF_1 = BF_2 = d(B, F_2F_4)$ dus B op p_1 (parabool).
De raaklijn in B aan p_1 is de bissectrice van $\angle F_1BF_2$ en gaat dus door O.
Evenzo ligt B op p_2 en gaat de raaklijn in B aan p_2 door O.
De parabolen p_1 en p_2 raken elkaar dus in B.

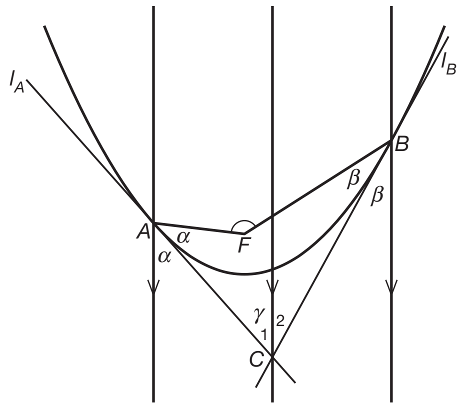
b Gegeven:
Zie opgave.
Te bewijzen:
F_4 ligt op de raaklijn aan p_1 in S.
Bewijs:
Teken SF_4 en $ST \perp F_2F_4$.



$$\left.\begin{array}{l} S \text{ op } p_1 \text{ dus } SF_1 = ST \text{ (parabool)} \\ \angle SF_1F_4 = \angle STF_4 = 90° \\ SF_4 = SF_4 \end{array}\right\} \triangle SF_1F_4 \cong \triangle STF_4 \text{ (ZZR)}$$

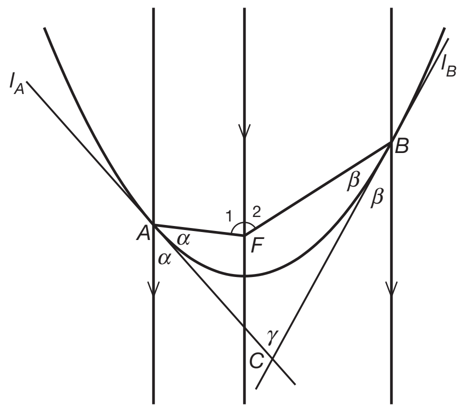
Hieruit volgt $\angle F_1SF_4 = \angle TSF_4$ en dus is volgens de raaklijneigenschap SF_4 raaklijn van p_1.
Dus F_4 ligt op de raaklijn aan p_1 in S.

5 **a** Gegeven:
Zie opgave.
Te bewijzen:
$\gamma = \alpha + \beta$
Bewijs:
Spiegel α in l_A en β in l_B. De gespiegelde lijnen staan loodrecht op de richtlijn (raaklijn parabool).
Teken door C een lijn evenwijdig met de gespiegelde lijnen.



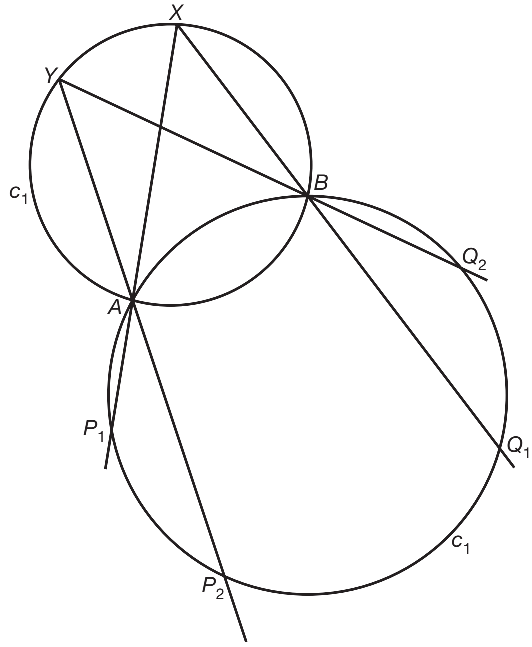
$$\left.\begin{array}{l}\angle C_1 = \alpha \text{ (Z-hoeken)}\\ \angle C_2 = \beta \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \angle C_{12} = \gamma = \alpha + \beta$$

b Gegeven:
Zie opgave.
Te bewijzen:
$\angle AFB = 2\gamma$
Bewijs:
Spiegel α in l_A en β in l_B. De gespiegelde lijnen staan loodrecht op de richtlijn (raaklijn parabool).
Teken door F een lijn evenwijdig met de gespiegelde lijnen.



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle F_1 = 2\alpha \text{ (Z-hoeken)}\\ \angle F_2 = 2\beta \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \angle F_{12} = 2\alpha + 2\beta\\ \gamma = \alpha + \beta \text{ (onderdeel a)}\end{array}\right\} \angle F_{12} = \angle AFB = 2\gamma$$

6 Gegeven:
Zie opgave.
Te bewijzen:
boog P_1Q_1 = boog P_2Q_2
Bewijs:

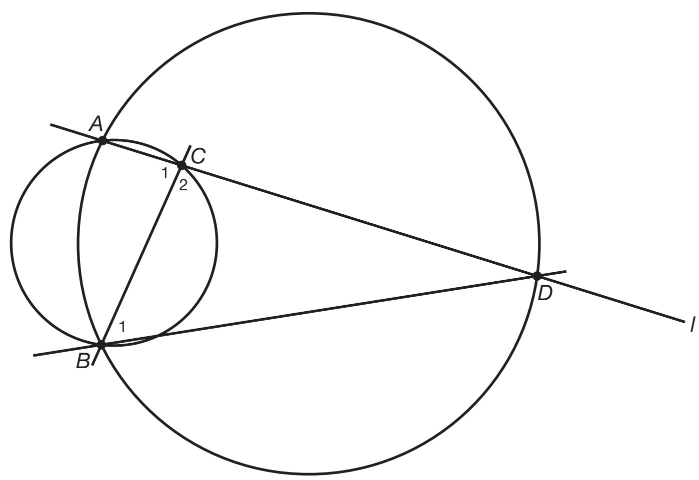


$$\left.\begin{array}{l}\angle YAX = \angle YBX \text{ (constante hoek)}\\ \angle YAX = \angle P_1AP_2 \text{ (overstaande hoeken)}\\ \angle YBX = \angle Q_1BQ_2 \text{ (overstaande hoeken)}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\angle P_1AP_2 = \angle Q_1BQ_2\\ \text{dus boog } P_1P_2 = \text{boog } Q_1Q_2\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{boog } P_1P_2 = \text{boog } Q_1Q_2\\ \text{boog } P_1Q_1 = \text{boog } P_1P_2 + \text{boog } P_2Q_1\\ \text{boog } P_2Q_2 = \text{boog } Q_1Q_2 + \text{boog } P_2Q_1\end{array}\right\} \text{boog } P_1Q_1 = \text{boog } P_2Q_2$$

bladzijde 156

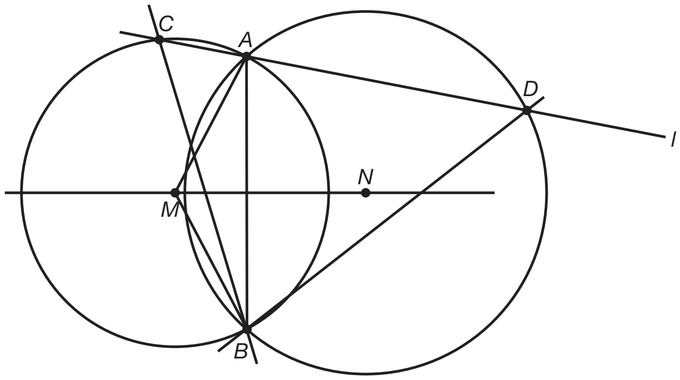
7 **a**



$$\left.\begin{array}{l}\angle D \text{ is onafhankelijk van de stand van } l \text{ (constante hoek)}\\ \angle C_1 \text{ is onafhankelijk van de stand van } l \text{ (constante hoek)}\\ \quad \text{dus } \angle C_2 \text{ is onafhankelijk van de stand van } l\\ \angle B_1 + \angle C_2 + \angle D = 180° \text{ (hoekensom driehoek)}\end{array}\right\} \angle B_1 \text{ is onafhankelijk van de stand van } l$$

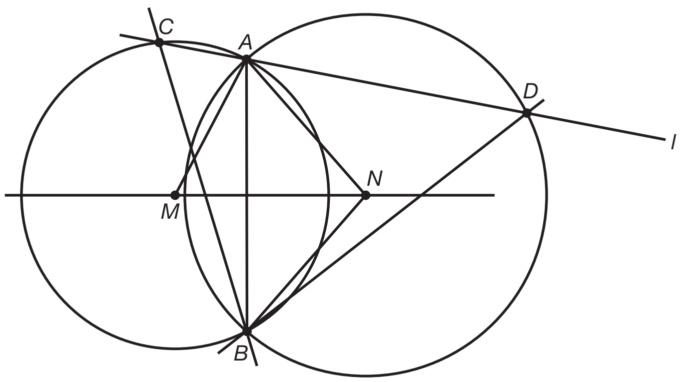
b Gegeven:
Zie opgave.
Te bewijzen:
$\angle AMN = \angle ACB$

Bewijs:
Teken AM, BM en AB.



$\left.\begin{array}{l}\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AMB \text{ (omtrekshoek)} \\ \triangle AMB \text{ is gelijkbenig, dus } \angle AMN = \frac{1}{2}\angle AMB\end{array}\right\} \angle ACB = \angle AMN$

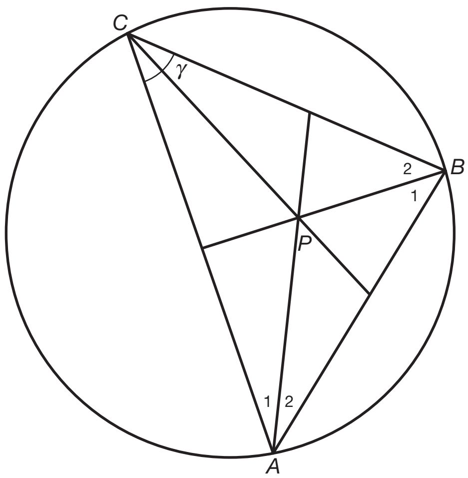
c Gegeven:
Zie opgave.
Te bewijzen:
$\angle MAN = \angle CBD$
Bewijs:
Teken AM, AN, BN en AB.



$\left.\begin{array}{l}\angle ADB = \frac{1}{2}\angle ANB \text{ (omtrekshoek)} \\ \triangle ANB \text{ is gelijkbenig, dus } \angle ANM = \frac{1}{2}\angle ANB\end{array}\right\} \angle ADB = \angle ANM$

$\left.\begin{array}{l}\angle MAN + \angle AMN + \angle ANM = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \\ \angle AMN = \angle ACB = \angle DCB \\ \angle ANM = \angle ADB = \angle CDB \\ \angle CBD + \angle DCB + \angle CDB = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)}\end{array}\right\} \angle MAN = \angle CBD$

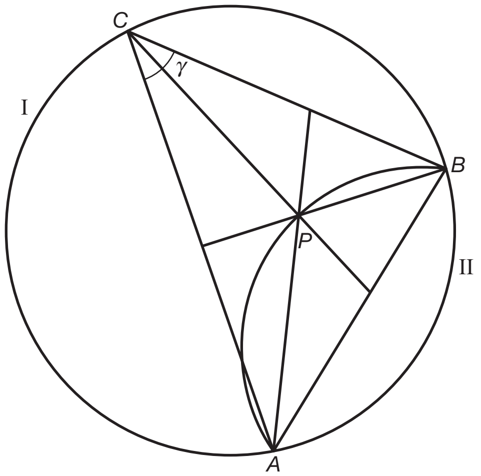
8 **a** Gegeven:
Zie opgave.
Te bewijzen:
$\angle APB = 90^\circ + \frac{1}{2}\gamma$
Bewijs:



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle APB + \angle A_2 + \angle B_1 = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)}\\ \angle A_2 = \frac{1}{2}\angle A_{12} \text{ (bissectrice)}\\ \angle B_1 = \frac{1}{2}\angle B_{12} \text{ (bissectrice)}\end{array}\right\} \angle APB + \frac{1}{2}\angle A_{12} + \frac{1}{2}\angle B_{12} = 180^\circ\\ \angle A_{12} + \angle B_{12} + \gamma = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek), dus } \frac{1}{2}\angle A_{12} + \frac{1}{2}\angle B_{12} = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma\end{array}\right\}$$

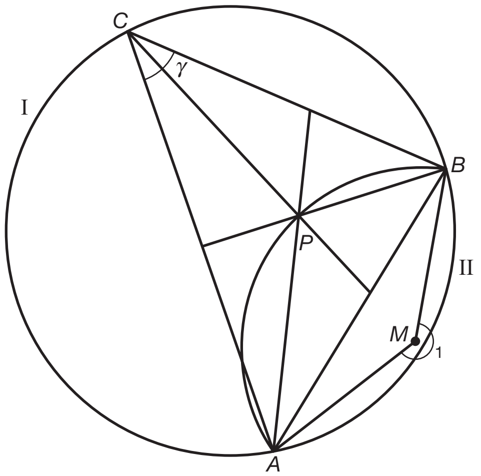
$\angle APB + 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma = 180^\circ$, dus $\angle APB = 90^\circ + \frac{1}{2}\gamma$

b Gegeven:
Zie opgave.
Te bewijzen:
De baan die P beschrijft is een cirkelboog.
Bewijs:



De grootte van γ verandert niet als C over boog I beweegt (constante hoek).
Dus $\angle APB = 90^\circ + \frac{1}{2}\gamma$ verandert niet van grootte als C over boog I beweegt.
Dus de baan van P is een cirkelboog (constante hoek).

c



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle APB = \frac{1}{2}\angle M_1 \text{ (omtrekshoek)}\\ \angle APB = 90^\circ + \frac{1}{2}\gamma\end{array}\right\} \frac{1}{2}\angle M_1 = 90^\circ + \frac{1}{2}\gamma\text{, dus } \angle M_1 = 180^\circ + \gamma\\ \angle AMB + \angle M_1 = 360^\circ\end{array}\right\}$$

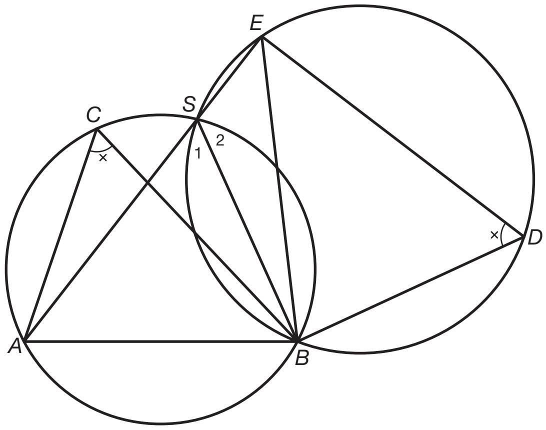
$\angle AMB + 180^\circ + \gamma = 360^\circ$, dus $\angle AMB = 180^\circ - \gamma$

d Gegeven:
Zie opgave.
Te bewijzen:
M ligt op boog II.
Bewijs:
$\angle AMB + \gamma = 180^\circ - \gamma + \gamma = 180^\circ$, dus $AMBC$ is een koordenvierhoek (koordenvierhoek) en hieruit volgt dat M op boog II ligt.

bladzijde 157

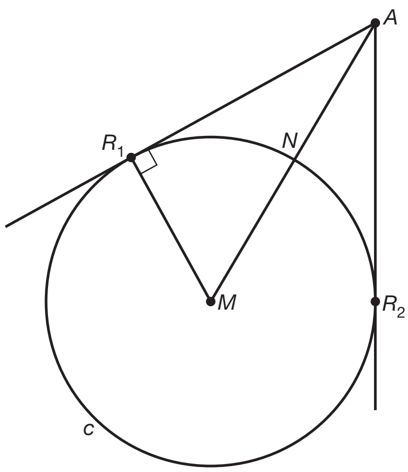
9 Gegeven:
De driehoeken ABC en BDE met $\angle ACB = \angle BDE$. De omgeschreven cirkels van de driehoeken snijden elkaar in B en in S.
Te bewijzen:
S ligt op AE.

Bewijs:
Teken AS, BS en ES.



$$\left.\begin{array}{l}\angle D + \angle S_2 = 180^\circ \text{ (koordenvierhoek)} \\ \angle D = \angle C \\ \angle C = \angle S_1 \text{ (constante hoek)}\end{array}\right\} \angle S_1 + \angle S_2 = 180^\circ\text{, dus } S \text{ ligt op } AE.$$

10 **a** Het snijpunt van AM en c is N.

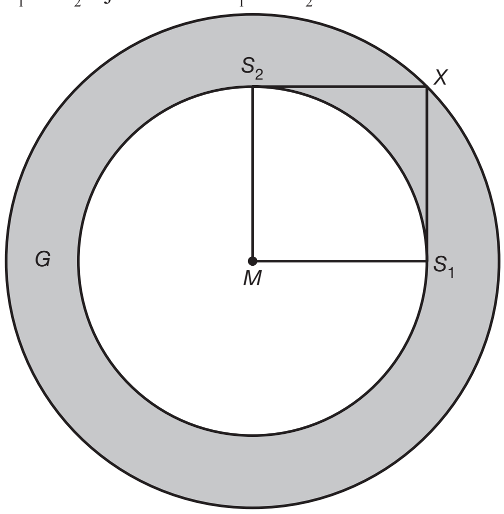


boog $R_1R_2 = \frac{1}{3}$ van de omtrek van c, dus $\angle R_1MR_2 = \frac{1}{3} \cdot 360^\circ = 120^\circ$

$$\left.\begin{array}{l}\angle R_1MA = \frac{1}{2}\angle R_1MR_2 = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ \\ \angle R_1 = 90^\circ \text{ (raaklijn)}\end{array}\right\} \begin{array}{l}AM = 2 \cdot MR_1 \\ AM = 2 \cdot MN\end{array}$$

Dus $AN = MN$, ofwel de afstand van A tot c is de helft van AM.

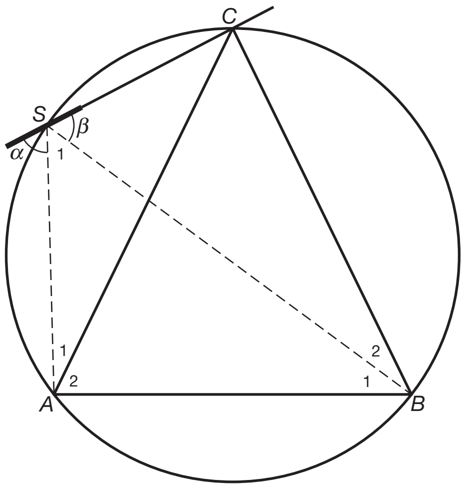
b In het grensgeval met $\alpha = 90^\circ$ is XS_1MS_2 een vierkant, immers de hoeken bij S_1 en S_2 zijn 90° en $MS_1 = MS_2$.



De zijde van het vierkant is r, dus $MX = r\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} O(G) &= O(\text{cirkel met straal } r\sqrt{2}) - O(\text{cirkel met straal } r) \\ &= \pi(r\sqrt{2})^2 - \pi r^2 = 2\pi r^2 - \pi r^2 = \pi r^2 = O(c) \end{aligned}$$

11 **a**



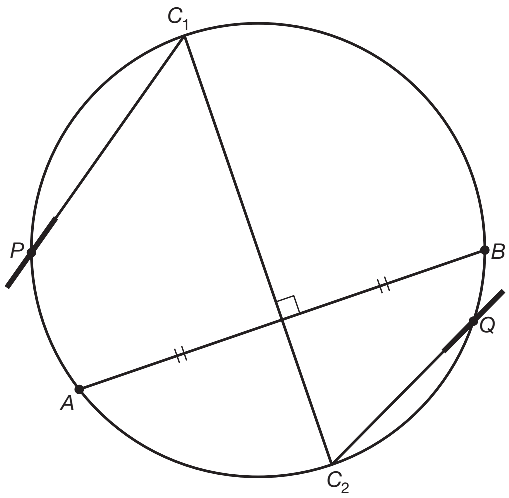
$\left.\begin{array}{l}\angle B_{12} + \angle S_1 + \beta = 180° \text{ (koordenvierhoek)} \\ \alpha + \angle S_1 + \beta = 180° \text{ (gestrekte hoek)}\end{array}\right\}\ \angle B_{12} = \alpha$

$\angle A_2 = \beta$ (constante hoek)

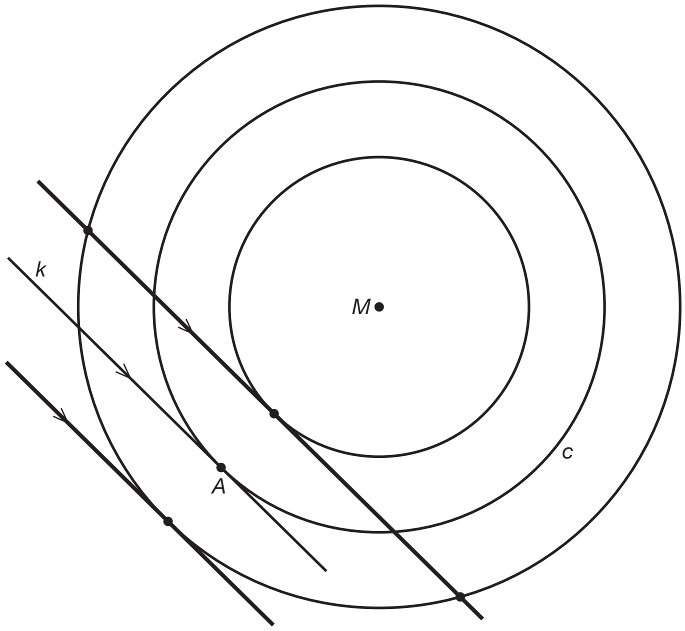
$\alpha = \beta$

$\left.\right\}\ \angle B_{12} = \angle A_2$ ofwel $\angle ABC = \angle BAC$

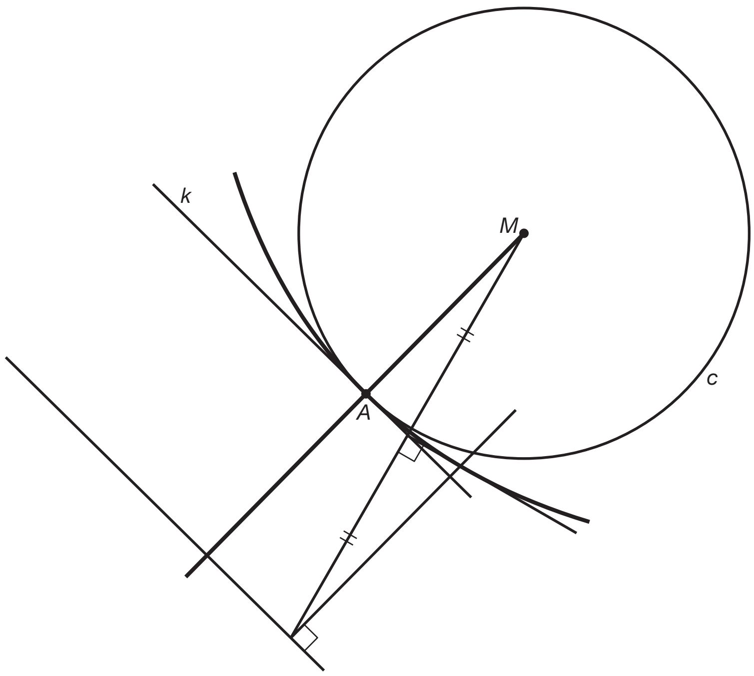
b De middelloodlijn van AB snijdt de cirkel in C_1 en C_2.
(Omdat C_1 en C_2 op de middelloodlijn van AB liggen geldt: $\angle C_1AB = \angle C_1BA$ en $\angle C_2AB = \angle C_2BA$).
Uit de omgekeerde bewering volgt nu dat de spiegeltjes in de richtingen PC_1 en QC_2 getekend moeten worden.



12 **a** Teken twee lijnen evenwijdig met *k* op afstand 1 cm van *k*, de cirkel met middelpunt *M* en straal 2 cm en de cirkel met middelpunt *M* en straal 4 cm.

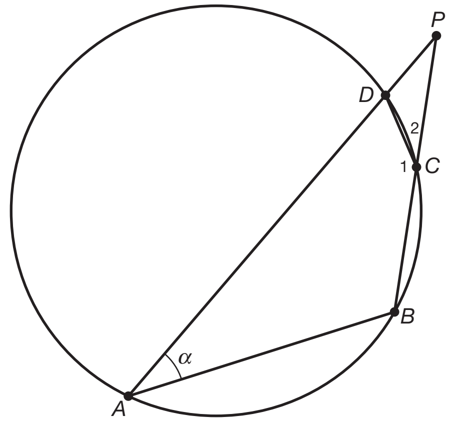


b De meetkundige plaats is de halve lijn *MA* en de parabool met brandpunt *M* en richtlijn evenwijdig met *k* op afstand 3 cm van *k*.



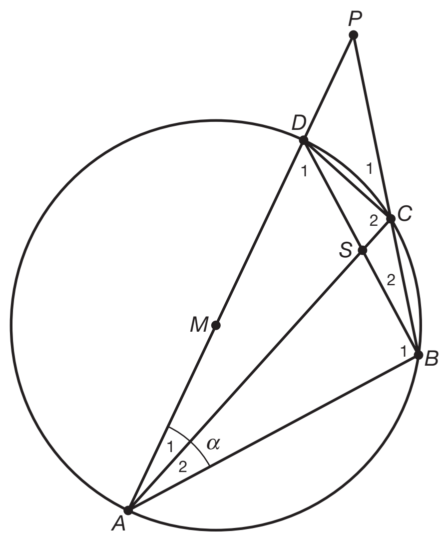
bladzijde 159

13 **a** Gegeven:
Zie opgave.
Te bewijzen:
$DC = DP$
Bewijs:



$$\left.\begin{array}{l} AB = BP \text{ dus } \angle P = \angle A = \alpha \text{ (gelijkbenige driehoek)} \\ \left.\begin{array}{l} \angle C_1 + \alpha = 180^\circ \text{ (koordenvierhoek)} \\ \angle C_1 + \angle C_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array}\right\} \angle C_2 = \alpha \end{array}\right\} \begin{array}{l} \angle P = \angle C_2 \text{, dus } \triangle CDP \text{ is een gelijkbenige driehoek en} \\ \text{hieruit volgt dat } DC = DP. \end{array}$$

b



$$\left.\begin{array}{l} \angle B_1 = 90^\circ \text{ (Thales)} \\ \alpha + \angle B_1 + \angle D_1 = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \end{array}\right\} \angle D_1 = 90^\circ - \alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle P = \alpha \text{ (onderdeel a)} \\ \left.\begin{array}{l} \angle C_1 = \alpha \text{ (onderdeel a)} \\ \angle C_2 = 90^\circ \text{ (Thales)} \end{array}\right\} \angle C_{12} = 90^\circ + \alpha \\ \angle A_1 + \angle P + \angle C_{12} = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \angle A_1 + \alpha + 90^\circ + \alpha = 180^\circ \\ \angle A_1 = 90^\circ - 2\alpha \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle A_1 + \angle D_1 + \angle ASD = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \\ \angle D_1 = 90^\circ - \alpha \\ \angle A_1 = 90^\circ - 2\alpha \end{array}\right\} \begin{array}{l} 90^\circ - 2\alpha + 90^\circ - \alpha + \angle ASD = 180^\circ \\ \angle ASD = 3\alpha \end{array}$$