Uitwerkingen wi vwo B1 H7
De afgeleide van gebroken functies.

1. Gegeven $f(x) = x^2$; $g(x) = 3x – 7$ en $p(x) = f(x) \,.\, g(x)$

a. $p(x) = f(x) \,.\, g(x) = x^2 \,.\, (3x – 7) = 3x^3 - 7x^2 \Rightarrow p\,'(x) = 9x^2 – 14x$
$f(x) = x^2 \Rightarrow f\,'(x) = 2x$ en $g\,'(x) = 3$

b. $p\,'(x) = 9x^2 – 14x$ en $f\,'(x) \,.\, g\,'(x) = 2x \,.\, 3 = 6x$ En dat is niet gelijk aan $p'(x)$.

c. $f\,'(x).g(x) + f(x) \,.\, g\,'(x) = 2x \,.\, (3x – 7) + x^2 \,.\, 3 = 6x^2 – 14x + 3x^2 = 9x^2 – 14x = p\,'(x)$

2.

a. $f(x) = (2 - 3x^2).(2 + 7x) \Rightarrow f\,'(x) = -6x.(2 + 7x) + (2 - 3x^2) \,.\, 7$

b. $g(x) = (2x – 5)^2 = (2x – 5)(2x – 5) \Rightarrow g'(x) = 2.(2x – 5) + (2x – 5) \,.\, 2$

c. $h(x) = (x^2 – 3x).(x^3 + x^2 + x) \Rightarrow h\,'(x) = (2x – 3).(\,(x^3 + x^2 + x) + (x^2 – 3x).(3x^2 + 2x + 1)$

d. $j(x) = (3x^2 – 4)^2 = (3x^2 – 4)(3x^2 – 4) \Rightarrow j'(x) = 6x.(3x^2 – 4) + (3x^2 - 4).\, 6x$

3.

a. $p = f.g.h = fg \,.\, h \Rightarrow$
$p' = (fg)'.h + (fg).h' = (f\,'.g + f.\, g').h + (fg) \,.\, h' = f\,'.g.h + f.g\,'.h + f.g.h\,'$

b. $p = f.g.h.j \Rightarrow p\,' = f\,'.g.h.j + f.g\,'.h.j + f.g.h\,'.j + f.g.h.j\,'$

4. Gegeven $f(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$

a. $f(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)} \Rightarrow \dfrac{f(x)}{1} = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ Nu kruislings vermenigvuldigen $\Rightarrow$ *t(x) = f(x) . n(x)*

b. Hier kunnen we de productregel op toepassen $\Rightarrow$
$$f\,'(x).n(x) + f(x).n'(x) = t\,'(x) \Rightarrow f\,'(x).n(x) = t\,'(x) - f(x).n'(x) \Rightarrow f\,'(x) = \frac{t\,'(x) - f(x).n'(x)}{n(x)}$$

c. Nu gebruiken we dat $f(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)} \Rightarrow f\,'(x) = \dfrac{t\,'(x) - \dfrac{t(x)}{n(x)}.n'(x)}{n(x)}$ vervolgens vermenigvuldigen we de teller en de noemer met *n(x)* $\Rightarrow$
$$f\,'(x) = \frac{t\,'(x).n(x) - n'(x).t(x)}{\left(n(x)\right)^2}$$
De quotiëntregel !!!

5.

a. $f(x) = \dfrac{x-2}{x+5} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1.(x+5)-1.(x-2)}{(x+5)^2} = \dfrac{7}{(x+5)^2}$

b. $g(x) = \dfrac{3x+2}{-x+6} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{3.(6-x)-(-1).(3x+2)}{(6-x)^2} = \dfrac{18-3x+3x+2}{(6-x)^2} = \dfrac{20}{(6-x)^2}$

c. $h(x) = \dfrac{2}{2x-1} \Rightarrow h'(x) = \dfrac{0.(2x-1)-2.2}{(2x-1)^2} = \dfrac{-4}{(2x-1)^2}$

d. $j(x) = \dfrac{6x-9}{3} = \dfrac{6x}{3} - \dfrac{9}{3} = 2x-3 \Rightarrow j'(x) = 2$

6.

a. $f(x) = \dfrac{x^3}{2x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3x^2.(2x^2+1)-4x.x^3}{(2x^2+1)^2} = \dfrac{6x^4+3x^2-4x^4}{(2x^2+1)^2} = \dfrac{2x^4+3x^2}{(2x^2+1)^2}$

b. $g(x) = \dfrac{x-2}{3-x^2} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{1.(3-x^2)-(-2x).(x-2)}{(3-x^2)^2} = \dfrac{3-x^2+2x^2-4x}{(3-x^2)^2} = \dfrac{x^2-4x+3}{(3-x^2)^2}$

c. $h(x) = \dfrac{3-x^2}{x-2} + x^3 \Rightarrow h'(x) = \dfrac{-2x.(x-2)-1.(3-x^2)}{(x-2)^2} + 3x^2 =$

$\dfrac{-2x^2+4x-3+x^2}{(x-2)^2} + 3x^2 = \dfrac{-x^2+4x-3}{(x-2)^2} + 3x^2$

d. $j(x) = x - \dfrac{2}{x+4} \Rightarrow j'(x) = 1 - \dfrac{0.(x+4)-1.2}{(x+4)^2} = 1 + \dfrac{2}{(x+4)^2}$

7. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{2x+5}$

a. Snijpunten met de *x*-as $\Rightarrow$ $y = 0$ $\Rightarrow x^2 = 4$ en $2x + 5 \neq 0 \Rightarrow x = 2 \vee x = -2 \Rightarrow$ de punten zijn A(2 , 0) en B(-2 , 0) Verder geldt:

$f'(x) = \dfrac{2x.(2x+5)-2.(x^2-4)}{(2x+5)^2} = \dfrac{4x^2+10x-2x^2+8}{(2x+5)^2} = \dfrac{2x^2+10x+8}{(2x+5)^2}$

Stel de raaklijn is : $y = ax + b \Rightarrow a = f'(2) = \dfrac{36}{81} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow y = \frac{4}{9}x + b$ door A(2 , 0) $\Rightarrow$

$0 = \frac{4}{9}.2 + b \Rightarrow b = -\frac{8}{9}$ $\Rightarrow$ vergelijking *k* is : $y = \dfrac{4}{9}.x - \frac{8}{9}$

Stel *l* : $y = ax + b \Rightarrow a = f'(-2) = \dfrac{-4}{1^2} = -4 \Rightarrow y = -4.x + b$ door B(-2 , 0) $\Rightarrow 0 = 8 + b \Rightarrow$

$b = -8 \Rightarrow$ vergelijking *l* is : $y = -4x - 8$

b. Snijpunt C $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ C(0 , $-\frac{4}{5}$) Verder geldt $f\,'(0) = \dfrac{8}{25}$ $\Rightarrow$ stel $y = \frac{8}{25}x + \text{b}$ door (0 , $-\frac{4}{5}$)

$\Rightarrow$ de vergelijking van m wordt dus: $y = \frac{8}{25}x - \frac{4}{5}$

c. $f\,'(x) = \dfrac{2x^2 + 10x + 8}{(2x + 5)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 10x + 8 = 0$ □ $x^2 + 5x + 4 = 0$ □ $(x + 1)(x + 4) = 0$ □

$x = -1 \vee x = -4$ De coördinaten van deze twee punten zijn (-1 , -1) en (-4 , -4).

8. $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x^2 - 4}$

Snijpunt y-as $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ A(0 , $\frac{5}{4}$) . Snijpunt x-as $\Rightarrow 2x = 5$ en $x^2 \neq 4 \Rightarrow x = 2{,}5$ $\Rightarrow$

B(2,5 ; 0) ; $f\,'(x) = \dfrac{2.(x^2 - 4) - 2x.(2x - 5)}{(x^2 - 4)^2} = \dfrac{2x^2 - 8 - 4x^2 + 10x}{(x^2 - 4)^2} = \dfrac{-2x^2 + 10x - 8}{(x^2 - 4)^2}$

$\Rightarrow f\,'(0) = -0{,}5 \Rightarrow$ Stel k is : $y = -0{,}5.x + b$ door (0 , $\frac{5}{4}$) $\Rightarrow b = \frac{5}{4} \Rightarrow k$: $y = -0{,}5x + \frac{5}{4}$

Nu $x_B = 2{,}5$ invullen $\Rightarrow y = -0{,}5 \,.\, 2{,}5 + \frac{5}{4} = -\frac{5}{4} + \frac{5}{4} = 0 \Rightarrow$ punt B ligt ook op k.

9.

a. $\dfrac{1}{x^3} = x^{-3}$ $\quad\dfrac{5}{x^4} = 5.\dfrac{1}{x^4} = 5.x^{-4}$ $\quad\dfrac{1}{3x^2} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{3}.x^{-2}$

b. $x^{-4} = \dfrac{1}{x^4}$ $\quad 3x^{-2} = 3.\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{3}{x^2}$ $\quad\dfrac{1}{7}x^{-6} = \dfrac{1}{7}.\dfrac{1}{x^6} = \dfrac{1}{7x^6}$

10.

a. $\dfrac{x^3 + 5x^2}{x} = \dfrac{x^3}{x} + \dfrac{5x^2}{x} = x^2 + 5x$

$\dfrac{4x^2 + 7x}{x^3} = \dfrac{4x^2}{x^3} + \dfrac{7x}{x^3} = 4x^{-1} + 7x^{-2}$

$\dfrac{2x^5 + 5x^2}{3x^4} = \dfrac{2x^5}{3x^4} + \dfrac{5x^2}{3x^4} = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3}x^{-2}$

b. $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{1}{2x}.\dfrac{x}{x} + \dfrac{2}{x^2}.\dfrac{2}{2} = \dfrac{x}{2x^2} + \dfrac{4}{2x^2} = \dfrac{x + 4}{2x^2}$

$\frac{1}{2}x + \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{x}{2}.\dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{3}{x^2}.\dfrac{2}{2} = \dfrac{x^3}{2x^2} + \dfrac{6}{2x^2} = \dfrac{x^3 + 6}{2x^2}$

$$\tfrac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4x} = \frac{2x^2}{3}.\frac{4x}{4x} - \frac{3}{4x}.\frac{3}{3} = \frac{8x^3}{12x} - \frac{9}{12x} = \frac{8x^3 - 9}{12x}$$

11.

a. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \quad \Rightarrow f\,'(x) = \dfrac{0.x^2 - 2x.1}{\left(x^2\right)^2} = \dfrac{-2x}{x^4} = \dfrac{-2}{x^3}$

b. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2.x^{-3} = \dfrac{-2}{x^3}$ en dit klopt met onderdeel a.

c. $[x^{-5}]' = [\dfrac{1}{x^5}]' = \dfrac{0.x^5 - 5x^4}{(x^5)^2} = \dfrac{-5}{x^6} = -5.x^{-6}$

12.

a. In de noemer staat slechts één term en dan kan je heel goed eerst delen.

b. De functies g en h .

13.

a. $f(x) = \dfrac{1}{x^6} = x^{-6} \;\Rightarrow\; f\,'(x) = -6x^{-7} = -\dfrac{6}{x^7}$

b. $g(x) = 5 - \dfrac{3}{x^2} = 5 - 3.x^{-2} \;\Rightarrow\; f\,'(x) = 6x^{-3} = \dfrac{6}{x^3}$

c. $h(x) = ax^4 - \dfrac{b}{x^4} = ax^4 - b.x^{-4} \;\Rightarrow\; h'(x) = 4ax^3 + 4bx^{-5} = 4ax^3 + \dfrac{4b}{x^5}$

14.

a. $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x^2} = \dfrac{2\mathrm{x}}{3\mathrm{x}^2} - \dfrac{1}{3x^2} = \tfrac{2}{3}x^{-1} - \tfrac{1}{3}x^{-2} \;\Rightarrow\; g\,'(x) = -\tfrac{2}{3}x^{-2} + \tfrac{2}{3}x^{-3} = -\dfrac{2}{3x^2} + \dfrac{2}{3x^3} = \dfrac{-2x+2}{3x^3}$

b. $g(x) = \dfrac{3x^2}{2x-1} \;\Rightarrow\; h'(x) = \dfrac{6x.(2x-1) - 2.3x^2}{(2x-1)^2} = \dfrac{12x^2 - 6x - 6x^2}{(2x-1)^2} = \dfrac{6x^2 - 6x}{(2x-1)^2}$

c. $h(x) = \dfrac{3x^6 - 3}{x^3} = \dfrac{3x^6}{x^3} - \dfrac{3}{x^3} = 3x^3 - 3x^{-3} \Rightarrow h'(x) = 9x^2 + 9x^{-4} = 9x^2 + \dfrac{9}{x^4} = \dfrac{9x^6}{x^4} + \dfrac{9}{x^4} = \dfrac{9x^6 + 9}{x^4}$

15.

a. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1} \;\Rightarrow\; f\,'(x) = \dfrac{1.(x^2-1) - 2x.x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-1 - x^2}{(x^2-1)^2}$

$a = f'(2) = \frac{-4-1}{(4-1)^2} = -\frac{5}{9} \Rightarrow$ stel $y = -\frac{5}{9}x + b$ door het punt A(2,f(2)) = (2 , $\frac{2}{3}$) $\Rightarrow$

$\frac{2}{3} = -\frac{5}{9}.2 + b \Leftrightarrow b = \frac{6}{9} + \frac{10}{9} = \frac{16}{9} \Rightarrow$ vergelijking is: $y = -\frac{5}{9}x + \frac{16}{9}$

b. $g(x) = \frac{x^2-1}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = x - x^{-1} \Rightarrow g'(x) = 1 + x^{-2} = 1 + \frac{1}{x^2}$

Stel $a = g'(2) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{4}x + b$ door B(2 , $\frac{3}{2}$) $\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{5}{4}.2 + b \Leftrightarrow$

$b = -1 \Rightarrow$ de vergelijking is : $y = \frac{5}{4}x - 1$

c. Eerst de punten C en D bepalen $\Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1 \Rightarrow$ C(-1 , 0) en

D(1 , 0) Stel $a = g'(-1) = 1 + 1 = 2 \Rightarrow$ stel $y = 2.x + b$ door C (-1,0) $\Rightarrow 0 = -2 + b \Rightarrow$
$b = 2 \Rightarrow$ vergelijking m door C is : $y = 2x + 2$

Stel $a = g'(1) = 1 + 1 = 2 \Rightarrow y = 2x + b$ door D(1 , 0) $\Rightarrow 0 = 2 + b \Rightarrow b = -2 \Rightarrow$
de vergelijking n door D is: $y = 2x - 2$

16.

a. $\frac{x^2}{\sqrt{x}} = \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{1\frac{1}{2}}$ $\qquad \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ $\qquad \frac{x^2.\sqrt{x}}{x^4} = \frac{x^{2\frac{1}{2}}}{x^4} = x^{-1\frac{1}{2}}$

b. $x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x}$ $\qquad x^{2\frac{1}{2}} = x^2.x^{\frac{1}{2}} = x^2.\sqrt{x}$ $\qquad x^{-1\frac{1}{3}} = \frac{1}{x.x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{x.\sqrt[3]{x}}$

17.

a. $x^{0,5}.x^{0,5} = x^1 \Rightarrow [x^{0,5}.x^{0,5}]' = [x]' \Rightarrow [x^{0,5}]'.x^{0,5} + x^{0,5}.[x^{0,5}]' = 1 \Leftrightarrow 2.x^{0,5}.[x^{0,5}]' = 1$

b. Uit onderdeel a volgt nu : $[x^{0,5}]' = \frac{1}{2.x^{0,5}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{x^{0,5}} = \frac{1}{2}x^{-0,5}$

18.

a. $f(x) = x + \sqrt{x} = x + x^{0,5} \Rightarrow f'(x) = 1 + 0,5x^{-0,5} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b. $g(x) = x.\sqrt[3]{x} = x^{\frac{4}{3}} \Rightarrow g'(x) = \frac{4}{3}.x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}.\sqrt[3]{x}$

c. $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-0,5} \Rightarrow h'(x) = -0,5.x^{-1,5} = -\frac{1}{2}.\frac{1}{x^{1,5}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

d. $j(x) = x^3.\sqrt[5]{x^3} = x^{3\frac{3}{5}} \Rightarrow j'(x) = 3\frac{3}{5}.x^{2\frac{3}{5}} = 3\frac{3}{5}.x^2.x^{\frac{3}{5}} = 3\frac{3}{5}.x^2.\sqrt[5]{x^3}$

e. $k(x) = x^2.\sqrt[4]{x} = x^{2\frac{1}{4}} \Rightarrow j'(x) = 2\frac{1}{4}x^{1\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{4}x.x^{\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{4}x.\sqrt[4]{x}$

f. $l(x) = \left(x^2+1\right)\left(1+\sqrt{x}\right) = x^2 + x^2\sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} = x^{2\frac{1}{2}} + x^2 + x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$l'(x) = 2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} + 2x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} + 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

19.

a. $f(x) = (x\sqrt{x}-3)^2 = x^3 - 6x\sqrt{x} + 9 = x^3 - 6x^{1\frac{1}{2}} + 9 \Rightarrow j'(x) = 3x^2 - 9x^{\frac{1}{2}} = 3x^2 - 9\sqrt{x}$

b. $g(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{x+1} = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{x+1} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.(x+1) - 1.x^{\frac{3}{2}}}{(x+1)^2} = \dfrac{1{,}5x\sqrt{x} + 1{,}5\sqrt{x} - x\sqrt{x}}{(x+1)^2} = \dfrac{0{,}5x\sqrt{x} + 1{,}5\sqrt{x}}{(x+1)^2}$

c. $h(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{x^2+2} \Rightarrow h'(x) = \dfrac{2.\frac{1}{2\sqrt{x}}.\left(x^2+2\right) - 2x.2\sqrt{x}}{(x^2+2)^2} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}.\left(x^2+2\right) - 4x.\sqrt{x}}{(x^2+2)^2}.\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} =$

$\dfrac{(x^2+2) - 4x^2}{(x^2+2)^2.\sqrt{x}} = \dfrac{2 - 3x^2}{(x^2+2)^2.\sqrt{x}}$

20.

a. $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}} = \dfrac{x}{x^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow l'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} =$

$\dfrac{x}{2x\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$

b. $g(x) = \dfrac{x+1}{x\sqrt{x}} = \dfrac{x}{x^{1\frac{1}{2}}} + \dfrac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}} - 1\dfrac{1}{2}x^{-2\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}} - \dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}} =$

$\dfrac{-x}{2x^2\sqrt{x}} - \dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}} = \dfrac{-x-3}{2x^2\sqrt{x}}$

c. $h(x) = \dfrac{x^2+2}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \mathrm{h}'(x) = \dfrac{3}{4}x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{4}\sqrt{x} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{3\sqrt{x}}{4} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} =$

$\dfrac{3\sqrt{x}}{4}.\dfrac{x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}.\dfrac{2}{2} = \dfrac{3x^2-2}{4x\sqrt{x}}$

21. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ Stel $y = ax + b \Rightarrow a = f'(\frac{1}{8}) = \dfrac{2}{3.\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow$

$y = \frac{4}{3}x + b$ door het punt A$(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}) \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{4}{3}.\frac{1}{8} + b \Rightarrow b = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \Rightarrow k\!: y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{12}$

l: $x_B = 8 \Rightarrow$ B(8 , 4) en $a = f'(8) = \dfrac{2}{3.2} = \dfrac{1}{3}$ $\Rightarrow$ stel l: $y = \frac{1}{3}x + b$ $\quad$ l door B(8 , 4) $\Rightarrow$

$4 = \frac{1}{3}.8 + b \Rightarrow b = \frac{4}{3}$ $\Rightarrow$ vergelijking van l is: $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

Nu het snijpunt van k en $l \Rightarrow \frac{4}{3}x + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} - \frac{1}{12} = \frac{5}{4}$ Nu dit invullen bij b.v. l $\Rightarrow$

$y_C = \frac{1}{3}.\frac{5}{4} + \frac{4}{3} = 1\frac{3}{4}$ $\Rightarrow$ C($\frac{5}{4}$,$1\frac{3}{4}$)

22. Gegeven $f(x) = x\sqrt{x} - 3x$

a. $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - 3x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3 = \dfrac{3}{2}\sqrt{x} - 3$ Raaklijn in O $\Rightarrow f'(0) = -3 \Rightarrow$

Vergelijking van de raaklijn is dus : $y = -3x$. ($b = 0$ omdat de raaklijn door O gaat)

b. r.c. van $l = 3$ $\Rightarrow$ Stel de vergelijking is : $y = 3x + b$ Raken $\Rightarrow f'(x) = 3$

$\dfrac{3}{2}\sqrt{x} - 3 = 3 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$ $\Rightarrow$ Raakpunt (16 , 16) . Nu dit punt invullen in de vergelijking van de raaklijn $\Rightarrow 16 = 48 + b \Rightarrow b = -32 \Rightarrow$

De vergelijking van l is nu : $y = 3x - 32$.

23. $f(x) = \dfrac{5x\sqrt{x}}{x+1} = \dfrac{5x^{1.5}}{x+1}$ Eerst lijn k opstellen $\Rightarrow$ raakpunt A : (4 , 8)

$f'(x) = \dfrac{7,5x^{0,5}.(x+1) - 5x\sqrt{x}}{(x+1)^2} = \dfrac{2.5x\sqrt{x} + 7,5\sqrt{x}}{(x+1)^2}$

Stel $y = ax + b$ $\Rightarrow f'(4) = \dfrac{20+15}{25} = \frac{7}{5} \Rightarrow$

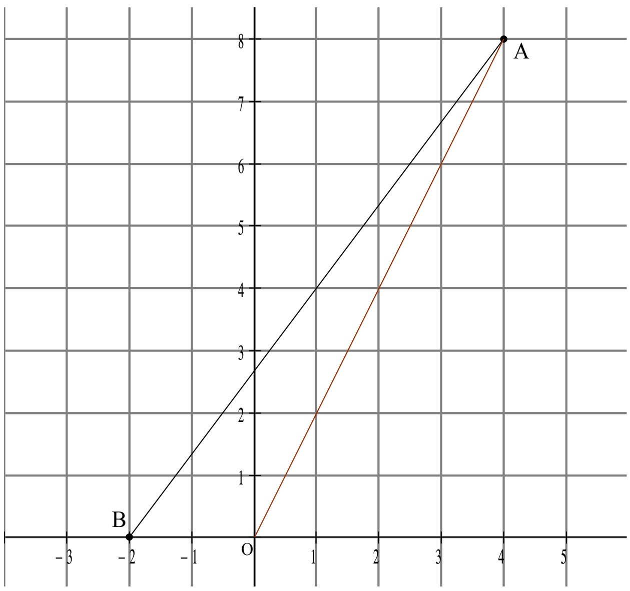
$y = \frac{7}{5}x + b$ door A(4 , 8) $\Rightarrow 8 = \frac{28}{5} + b \Rightarrow$

$b = \frac{12}{5}$ $\Rightarrow k$: $y = \frac{7}{5}x + \frac{12}{5}$

Nu de lijn k met de x-as snijden $\Rightarrow \frac{7}{5}x + \frac{12}{5} = 0$ $\Leftrightarrow$

$7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{12}{7}$ $\Rightarrow$ B($-\frac{12}{7}$, 0)

$\Rightarrow$ O(ΔBOA) $= \frac{1}{2}.\frac{12}{7}.8 = 6\frac{6}{7}$



24. $s = 10t\sqrt{t}$

a. $s(t) = 10.t^{1,5} \Rightarrow s'(t) = 15t^{0,5} = 15\sqrt{t} \Rightarrow v(1) = s'(1) = 15m/s$

b. Nu moet gelden : $108\dfrac{km}{uur} = 108.\dfrac{1000}{3600}\dfrac{m}{s} = 30\dfrac{m}{s} \Rightarrow$

$s'(t) = 15\sqrt{t} = 30 \Leftrightarrow \sqrt{t} = 2 \Leftrightarrow t = 4 \Rightarrow$ Na 4 seconde volgt het gevraagde.

c. 9sec $\Rightarrow t = 9 \Rightarrow s(9) = 10.9.\sqrt{9} = 270$ meter. De snelheid op $t = 9$ is $v(9) = s'(9) = 45$ m/s.
De totale afstand in de eerste minuut is :
270 meter + 45 . 51 meter = 2565 meter.

25. Gegeven : $f(x) = \left(x^2 - 5x\right)^2$

a. $f(x) = \left(x^2 - 5x\right)^2 = x^4 - 10x^3 + 25x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 30x^2 + 50x$

b. $2(x^2 - 5x).[x^2 - 5x]' = 2(x^2 - 5x).(2x - 5) =$
$2(2x^3 - 5x^2 - 10x^2 + 25x) = 4x^3 - 30x^2 + 50x = f'(x)$

26. $g(x) = \left(x^2 - 4x + 5\right)^3$ en

$h(x) = 3(x^2 - 4x + 5)^2.[x^2 - 4x + 5]' = 3(x^2 - 4x + 5).(2x - 4)$

Voer in : $y_1 = g(x)$ en $y_2 =$ n Deriv(y_1 , x , x) en $y_3 = h(x)$.

X	Y1	Y2
0	125	-300
1	8	-24
2	1	0
3	8	24
4	125	300
5	1000	1800
6	4913	6936

X=0

X	Y2	Y3
0	-300	-300
1	-24	-24
2	0	0
3	24	24
4	300	300
5	1800	1800
6	6936	6936

Y3=-300

Hieruit blijkt dat de afgeleide van y_1 ook gelijk is aan $h(x)$.

27.

a. $f(x) = -2(2x + 1)^4 \Rightarrow f'(x) = -8(2x + 1)^3.2 = -16.(2x + 1)^3$

b. $g(x) = \dfrac{1}{(3x - 2)^2} = (3x - 2)^{-2} \Rightarrow g'(x) = -2.(3x - 2)^{-3}.3 = -\dfrac{6}{(3x - 2)^3}$

c. $h(x) = \sqrt{2x^2 + 4x} \Rightarrow h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2x^2 + 4x}}.(4x + 4) = \dfrac{2x + 2}{\sqrt{2x^2 + 4x}}$

d. $j(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x - 1}} = \left(4x - 1\right)^{-0,5} \Rightarrow j'(x) = -0,5.\left(4x - 1\right)^{-1,5}.4 = -\dfrac{2}{(4x - 1)\sqrt{4x - 1}}$

e. $k(x)=\left(x^2+3\right).\sqrt{x^2+3}=\left(x^2+3\right)^{1,5}\Rightarrow\ k'(x)=1,5(x^2+3)^{0,5}.2x=3x\sqrt{x^2+3}$

f. $l(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}=\left(x^2+2x+2\right)^{-0,5}\Rightarrow\ l'(x)=-0,5\left(x^2+2x+2\right)^{-1,5}.(2x+2)=$

$-\dfrac{x+1}{\left(x^2+2x+3\right)\sqrt{x^2+2x+3}}$

28.

a. $f(x)=4(x^3+7x-2)^2\Rightarrow\ f'(x)=8.(x^3+7x-2).(3x^2+7)$

b. $g(x)=-\dfrac{6}{(x^2+3x)^3}=-6(x^2+3x)^{-3}\Rightarrow\ g'(x)=18(x^2+3x)^{-4}.(2x+3)=\dfrac{18(2x+3)}{(x^2+3x)^4}$

c. $h(x)=\sqrt[3]{(x^3+3x)}=(x^3+3x)^{\frac{1}{3}}\Rightarrow\ h'(x)=\dfrac{1}{3}.(x^3+3x)^{-\frac{2}{3}}.(3x^2+3)=\dfrac{x^2+1}{\sqrt[3]{(x^3+3x)^2}}$

d. $j(x)=\dfrac{1}{(4-x)\sqrt{4-x}}=(4-x)^{-1,5}\Rightarrow\ j'(x)=-1,5(4-x)^{-2,5}.(-1)=\dfrac{1,5}{(4-x)^2\sqrt{4-x}}$

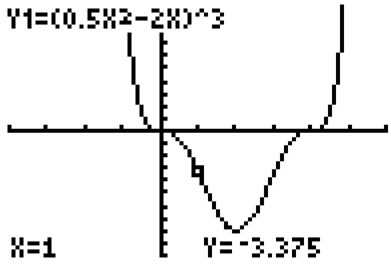
e. $k(x)=5\sqrt{2x^4+x^2}+4x^2\Rightarrow\ k'(x)=5.\dfrac{1}{2\sqrt{2x^4+x^2}}.(8x^3+2x)+8x=$

$\dfrac{5(8x^3+2x)}{2\sqrt{2x^4+x^2}}+8x$

f. $l(x)=\dfrac{x^2+4}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow\ l'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+4}}.2x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

29. $f(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)^3$

a. Zie figuur.



b. Horizontale raaklijn $\Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)^2.(x-2)=0 \Leftrightarrow$

$0,5x^2-2x=0 \vee x-2=0 \Leftrightarrow x(0,5x-2)=0 \vee x=2 \Leftrightarrow x=0 \vee x=4 \vee x=2$

c. Raaklijn in $x = 6 \Rightarrow f'(6)$ = r.c. = 432 $\Rightarrow y = 432x + b$ Het raakpunt is (6 , 216) $\Rightarrow$
216 = 432 . 6 + b ⇔ b = -2376 $\Rightarrow$ De vergelijking is : $y = 432x - 2376$

30. $f(x) = \sqrt{x^2+9} - x^2 + 5x$

a. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+9}}.2x - 2x + 5 = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 2x + 5$ $\Rightarrow f'(4) = 0{,}8 - 8 + 5 = -2{,}2 \Rightarrow$
Nu is de vergelijking voorlopig: $y = -2{,}2x + b$ door het punt (4 , f(4)) = (4 , 9) $\Rightarrow$
9 = -2,2 . 4 + b ⇔ b = 17,8 $\Rightarrow$ De gevraagde vergelijking is : $y = -2{,}2x + 17{,}8$

b. Horizontale raaklijn $\Rightarrow f'(x) = 0$ in $x = 3$ $\Rightarrow f'(3) = \dfrac{3}{\sqrt{18}} - 6 + 5 \neq 0$ $\Rightarrow$ Geen horizontale raaklijn in $x = 3$.

c. l raakt en // aan $y = 5x - 2$ $\Rightarrow f'(x) = 5$ ⇔ $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 2x + 5 = 5 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} = 2x \Rightarrow$

(kwadrateren) $\dfrac{x^2}{x^2+9} = 4x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4x^2(x^2+9)$ ⇔ $4x^4 + 36x^2 = x^2$ ⇔
$4x^4 + 35x^2 = 0$ ⇔ $x^2(4x^2 + 35) = 0$ ⇔ $x = 0 \vee 4x^2 = -35$ (kan niet) $\Rightarrow$ Raakpunt (0 , 3) $\Rightarrow$
De formule van l is : $y = 5x + 3$

31. $f(x) = x.\sqrt{2x+1}$ f is het product van de functie $y = x$ en $y = \sqrt{(2x+1)}$ $\Rightarrow$ productregel.

Tijdens het differentiëren hebben we de afgeleide van $y = \sqrt{(2x+1)}$ nodig. Dit is de samenstelling van de twee functies $y = \sqrt{x}$ en $y = 2x + 1$ $\Rightarrow$ kettingregel.

Uitwerking: $f'(x) = 1.\sqrt{2x+1} + x.\dfrac{1}{2\sqrt{2x+1}}.2 = \sqrt{2x+1} + \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

32.

a. $f(x) = x\sqrt{3x+1} \Rightarrow f'(x) = 1.\sqrt{3x+1} + x.\dfrac{1}{2\sqrt{3x+1}}.3 = \sqrt{3x+1} + \dfrac{3x}{2\sqrt{3x+1}}$

b. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}.2x.(2x+1) - 2.\sqrt{x^2+1}}{(2x+1)^2} =$

$$\frac{\dfrac{2x^2+x}{\sqrt{x^2+1}} - 2.\sqrt{x^2+1}}{(2x+1)^2}.\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+x-2(x^2+1)}{(2x+1)^2.\sqrt{x^2+1}} = \frac{x-2}{(2x+1)^2.\sqrt{x^2+1}}$$

c. $h(x) = x.(3x+1)^3 \Rightarrow h'(x) = 1.(3x+1)^3 + 3x.(3x+1)^2.3 = (3x+1)^3 + 9x(3x+1)^2 =$
$=(3x+1)^2(3x+1 + 9x) = (3x+1)^2.(12x+1)$

d. $k(x) = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{4x+1}} \Rightarrow k'(x) = \dfrac{2x.\sqrt{4x+1} - (x^2-1).\dfrac{1}{2\sqrt{4x+1}}.4}{(4x+1)} =$

$\dfrac{2x.\sqrt{4x+1} - (x^2-1).\dfrac{2}{\sqrt{4x+1}}}{(4x+1)}.\dfrac{\sqrt{4x+1}}{\sqrt{4x+1}} = \dfrac{2x(4x+1) - 2(x^2-1)}{(4x+1).\sqrt{4x+1}} = \dfrac{6x^2+2x+2}{(4x+1).\sqrt{4x+1}}$

33. $f(x) = \frac{1}{2}x.\sqrt{3x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3x+1} + \frac{1}{2}x.\dfrac{1}{2\sqrt{3x+1}}.3 \quad \Rightarrow$

$f'(8) = 0{,}5 \,.\, 5 + 1{,}2 = 3{,}7$ Het raakpunt is (8 , 20) $\Rightarrow$
De vergelijking is : $y = 3{,}7x + b$ door (8,20) $\Rightarrow 20 = 3{,}7 \,.\, 8 + b$ ⇔ $b = -9{,}6 \Rightarrow$
De vergelijking van de raaklijn is : $y = 3{,}7x – 9{,}6$

34. $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}$

a. Horizontale raaklijn $\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{1.\sqrt{x^2+4} - (x+1).\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+4}}.2x}{x^2+4} = 0$ ⇔

$\sqrt{x^2+4} = \dfrac{(x+1).x}{\sqrt{x^2+4}} \Leftrightarrow x^2+4 = x^2+x$ ⇔ $x = 4 \Rightarrow$

Het punt is $(4 , \dfrac{5}{\sqrt{20}}) = (4, \frac{1}{2}\sqrt{5})$

b. Punt A is (0 ; 0,5) $\Rightarrow f'(0) = \dfrac{1.\sqrt{0+4} - (0+1).\dfrac{1}{2\sqrt{0+4}}.2.0}{0+4} = 0{,}5 \Rightarrow$

$k : y = 0{,}5x + 0{,}5$ Nu k snijden met de x-as $\Rightarrow$ B(-1 , 0) .
Nu is de lengte van OB = 1 en de lengte van OA = 0,5 $\Rightarrow$ Opp. Δ OAB = 0,5 . 1 . 0,5 = 0,25

35. $g(x) = \dfrac{x+6}{\sqrt{8x+9}}$

a. Ieder quotiënt $\dfrac{A}{B}$ is te schrijven als een product namelijk A . B^{-1} $\Rightarrow$ de productregel is ook mogelijk. We krijgen : $g(x) = (x+6).(8x+9)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$g'(x) = 1.(8x+9)^{-\frac{1}{2}} + (x+6).(-\frac{1}{2}).(8x+9)^{-1\frac{1}{2}}.8 = \dfrac{1}{\sqrt{8x+9}} - \dfrac{4(x+6)}{(8x+9)\sqrt{8x+9}} =$

$\dfrac{1}{\sqrt{8x+9}}.\dfrac{8x+9}{8x+9} - \dfrac{4(x+6)}{(8x+9)\sqrt{8x+9}} = \dfrac{4x-15}{(8x+9)\sqrt{8x+9}}$

b. $f(x) = (x+1).(x^2+4)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$$f'(x) = 1.(x^2+4)^{-\frac{1}{2}} + (x+1).(-\tfrac{1}{2}).(x^2+4)^{-1\frac{1}{2}}.2x = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{x(x+1)}{(x^2+4)^{1\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{x^2+4}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} - \frac{(x^2+x)}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} = \frac{4-x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$$

36.

a. $5 - 2\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow 4x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$ voldoet.

b. $6 + x\sqrt{x} = 10 \Leftrightarrow x\sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x^3 = 16 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{16}$ voldoet.

c. $\dfrac{5x^2-10}{x^2-4} = 0 \Leftrightarrow 5x^2 = 10 \wedge x^2 \neq 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$ voldoen allebei.

d. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ Stel $x^2 = p \Rightarrow p^2 - 5p + 4 = 0 \Leftrightarrow (p-4)(p-1) = 0 \Leftrightarrow$
$p = 4 \vee p = 1 \Leftrightarrow x^2 = 4 \vee x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2 \vee x = 1 \vee x = -1$

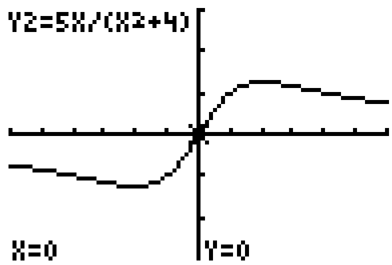
e. $x^3 - 8x\sqrt{x} + 12 = 0$ Stel $x\sqrt{x} = p \Rightarrow p^2 - 8p + 12 = 0 \Leftrightarrow (p-6)(p-2) = 0 \Leftrightarrow$
$p = 6 \vee p = 2 \Leftrightarrow x\sqrt{x} = 6 \vee x\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x^3 = 36 \vee x^3 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{36} \vee x = \sqrt[3]{4}$

f. $\dfrac{5x^2-10}{(x^2-4)^2} = 1\frac{2}{5} \Leftrightarrow \dfrac{5x^2-10}{(x^2-4)^2} = \dfrac{7}{5} \Rightarrow 5(5x^2-10) = 7(x^2-4)^2 \Leftrightarrow$
$25x^2 - 50 = 7(x^4 - 8x^2 + 16) \Leftrightarrow 7x^4 - 56x^2 + 112 = 25x^2 - 50 \Leftrightarrow 7x^4 - 81x^2 + 162 = 0$
Stel $x^2 = p \Rightarrow 7p^2 - 81p + 162 = 0 \Rightarrow D = (-81)^2 - 4.7.162 = 2025 \Rightarrow$
$p = \dfrac{81+45}{14} \vee p = \dfrac{81-45}{14} \Leftrightarrow p = 9 \vee p = \frac{18}{7} \Leftrightarrow x^2 = 9 \vee x^2 = \frac{18}{7} \Leftrightarrow$
$x = 3 \vee x = -3 \vee x = \sqrt{\frac{18}{7}} \vee x = -\sqrt{\frac{18}{7}}$ voldoen alle vier.

37. $f(x) = 6x - 2x\sqrt{x} = 6x - 2x^{1\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 6 - 3.x^{\frac{1}{2}} = 6 - 3\sqrt{x}$
Top $\Rightarrow$ horizontale raaklijn $\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow 9x = 36 \Leftrightarrow x = 4$ (voldoet) $\Rightarrow$
De top T is dan : (4 , 24 – 16) $\Leftrightarrow$ T(4 , 8)

38.

a. $f(x) = \dfrac{5x}{x^2+4} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{5.(x^2+4) - 2x.5x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{20-5x^2}{(x^2+4)^2}$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 20 = 5x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow$
$x = 2 \vee x = -2$
Uit de schets volgt dat er een maximum is bij $x = 2$ en een minimum bij $x = -2 \Rightarrow$
min $f(-2) = -1{,}25$ en max. $f(2) = 1{,}25$
Zie de schets. Daar blijkt dat het bereik is :
[-1,25 ; 1,25]



b. r.c. $= \frac{3}{5} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{5} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{20-5x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{3}{5}$

$\Leftrightarrow 3.\left(x^2+4\right)^2 = 5.(20-5x^2) \Leftrightarrow \quad 3x^4+24x^2+48 = 100-25x^2 \Leftrightarrow 3x^4+49x^2-52 = 0$

Stel $x^2 = p \Rightarrow 3p^2+49p-52 = 0$ $\; D = 49^2 - 12.(-52) = 3025 \Rightarrow \quad p = \dfrac{-49+55}{6} = 1$

$\vee \; p = \dfrac{-49-55}{6} = -\dfrac{104}{6} = -17\tfrac{1}{3} \Rightarrow x^2 = 1 \vee x^2 = -17\tfrac{1}{3}$ kan niet $\Rightarrow x = 1$ of $x = -1$

$\Rightarrow$ de x-coördinaten zijn dus 1 en -1.

39. $f(x) = x\sqrt{8-2x}$

a. Voor het domein moet gelden : $8 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -8 \Leftrightarrow x \leq 4 \Rightarrow D_f = \langle \leftarrow, 4]$

b. $f'(x) = 1.\sqrt{8-2x} + x.\dfrac{1}{2\sqrt{8-2x}}.(-2) = \sqrt{8-2x}.\dfrac{\sqrt{8-2x}}{\sqrt{8-2x}} - \dfrac{x}{\sqrt{8-2x}} =$

$= \dfrac{8-2x}{\sqrt{8-2x}} - \dfrac{x}{\sqrt{8-2x}} = \dfrac{8-3x}{\sqrt{8-2x}}$

c. Voor de top geldt $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2\tfrac{2}{3} \Rightarrow y_{top} = \tfrac{8}{3}\sqrt{8-\tfrac{16}{8}} = \tfrac{8}{3}\sqrt{\tfrac{8}{3}}$

Het bereik is dus : $\langle \leftarrow, \tfrac{8}{3}\sqrt{\tfrac{8}{3}}]$

d. Raaklijn heeft r.c. 1 $\Rightarrow f'(x) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{8-3x}{\sqrt{8-2x}} = 1 \Rightarrow \; 8-3x = \sqrt{8-2x} \Rightarrow$ kwadrateren $\Rightarrow$

$64 - 48x + 9x^2 = 8 - 2x \Leftrightarrow 9x^2 - 46x + 56 = 0 \Rightarrow D = (-46)^2 - 4.9.56 = 100 \Rightarrow$

$x = \dfrac{46+10}{18} \vee x = \dfrac{46-10}{18} \Leftrightarrow \; x = 3\tfrac{1}{9}$ (voldoet niet) $\vee\; x = 2$ (voldoet) $\Rightarrow$ A(2 , 4)

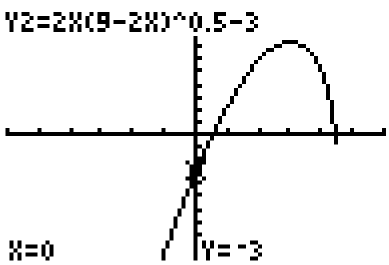
40. Gegeven: $f(x) = 2x\sqrt{9-2x} - 3$

a. Snijpunt y-as $\Rightarrow$ A(0 , -3) $\Rightarrow f'(x) = 2\sqrt{9-2x} + 2x.\dfrac{1}{2\sqrt{9-2x}}.(-2) \Rightarrow$

$f'(0) = 6 \Rightarrow$ De vergelijking van k is : $y = 6x - 3$

b. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{9-2x} + 2x.\dfrac{1}{2\sqrt{9-2x}}.(-2) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{9-2x} = \dfrac{2x}{\sqrt{9-2x}} \Rightarrow$

$9 - 2x = x \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$ (voldoet)
Uit de schets zien we dat er inderdaad een maximum is bij $x = 3$.
Het maximum is : $f(3) = 6\sqrt{3} - 3$



c. Voor het domein geldt: $9 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4{,}5 \Rightarrow D_f = \langle \leftarrow, 4\tfrac{1}{2}]$
en voor
het bereik geldt : $B_f = \langle \leftarrow, 6\sqrt{3} - 3]$

d. Er geldt uit het gegeven : $f'(x) = 1{,}5 \Rightarrow 2\sqrt{9-2x} + 2x.\dfrac{1}{2\sqrt{9-2x}}.(-2) = 1{,}5 \Leftrightarrow$

$2\sqrt{9-2x} - \dfrac{2x}{\sqrt{9-2x}} = 1\tfrac{1}{2}$ Nu links en rechts vermenigvuldigen met $2.\sqrt{(9-2x)} \Rightarrow$

$4(9-2x) - 4x = 3.\sqrt{(9-2x)} \Leftrightarrow 36 - 12x = 3.\sqrt{(9-2x)} \Leftrightarrow 12 - 4x = \sqrt{(9-2x)}$ Nu kwadrateren

$\Rightarrow\ 144 - 96x + 16x^2 = 9 - 2x$ □ $16x^2 - 94x + 135 = 0 \Rightarrow D = (-94)^2 - 4 \,.\, 16 \,.\, 135 = 196 \Rightarrow$

$x = \dfrac{94-14}{32} \vee x = \dfrac{94+14}{32} \Leftrightarrow x = 2{,}5$ (voldoet) $\vee\ x = 3\frac{3}{8}$ (voldoet niet) $\Rightarrow B(2{,}5\ ;\ 7)$

41. Gegeven : $f(x) = \dfrac{x^3+2}{\sqrt{x}}$

a. $f(x) = \dfrac{x^3+2}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3x^2.\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.\left(x^3+2\right)}{x}.\dfrac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{6x^3-(x^3+2)}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{5x^3-2}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{2\frac{1}{2}x^3-1}{x\sqrt{x}}$

top $\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2{,}5.x^3 = 1 \Leftrightarrow x^3 = 0{,}4 \Rightarrow x = \sqrt[3]{0{,}4}$

Nu x_{top} invullen in $f(x) \Rightarrow y_{top} \Rightarrow$ $f(\sqrt[3]{0{,}4}) = \dfrac{0{,}4+2}{\sqrt{\sqrt[3]{0{,}4}}} = \dfrac{2{,}4}{\left((0{,}4)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2{,}4}{(0{,}4)^{\frac{1}{6}}} = \dfrac{2{,}4}{\sqrt[6]{0{,}4}} \Rightarrow$

$a = 2{,}4$; $b = 6$ en $c = 0{,}4$

b. k met r.c = 1,5 $\Rightarrow f'(x) = 1{,}5 \Leftrightarrow \dfrac{5x^3-2}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow 6x\sqrt{x} = 10x^3 - 4 \Leftrightarrow 5x^3 - 3x\sqrt{x} - 2 = 0$

klopt met het gevraagde. Nu het oplossen:

stel $x.\sqrt{x} = p$ $\Rightarrow 5p^2 - 3p - 2 = 0 \Rightarrow D = 9-4.5.(-2) = 49 \Rightarrow p = \dfrac{3+7}{10} = 1$ of $p = \dfrac{3-7}{10} = -0{,}4 \Rightarrow$

$x.\sqrt{x} = 1$ dus $x = 1 \vee x.\sqrt{x} = -0{,}4$ kan niet

Raakpunt bij $x = 1 \Rightarrow$ raakpunt $(1\ ,\ 3)$ r.c. = 1,5 $\Rightarrow$ stel de vergelijking is: $y = 1{,}5x + b \Rightarrow$ door $(1\ ,\ 3) \Rightarrow 3 = 1{,}5 + b \Rightarrow b = 1{,}5 \Rightarrow$ vergelijking is : $y = 1{,}5x + 1{,}5$

42.

a. $f(x) = \dfrac{9x}{x\sqrt{x}+1} = \dfrac{9x}{x^{1{,}5}+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{9.(x\sqrt{x}+1) - 1{,}5x^{0{,}5}.9x}{(x\sqrt{x}+1)^2} = \dfrac{9-4{,}5x.\sqrt{x}}{(x\sqrt{x}+1)^2}$ Nu geldt :

$f'(4) = \dfrac{-4{,}5.4.2+9}{(4.2+1)^2} = -\frac{1}{3}$ Stel k is : $y = -\frac{1}{3}x + b$ door raakpunt $A(4, f(4)) = (4\ ,\ 4) \Rightarrow$

$4 = -\frac{4}{3} + b \Rightarrow b = 5\frac{1}{3} \Rightarrow$ De vergelijking van k is : $y = -\frac{1}{3}x + 5\frac{1}{3}$

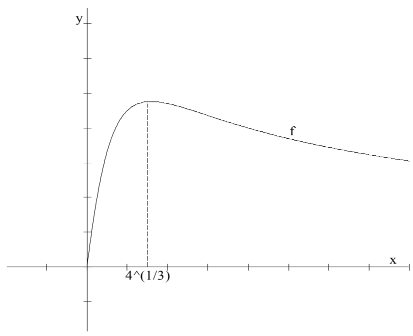
b. Extreme waarde $\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow$ de teller is dus nul $\Rightarrow$

$9 - 4{,}5x.\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x.\sqrt{x} = 2$ Nu kwadrateren $\Rightarrow x^3 = 4 \Rightarrow$

$x = \sqrt[3]{4}$

Aflezen uit de schets $\Rightarrow$

max. $f(\sqrt[3]{4}) = \dfrac{9.\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}.\sqrt{\sqrt[3]{4}}+1} = \dfrac{9.\sqrt[3]{4}}{4^{\frac{1}{3}}.4^{\frac{1}{6}}+1} = \dfrac{9.\sqrt[3]{4}}{4^{\frac{1}{2}}+1} = \dfrac{9.\sqrt[3]{4}}{3} = 3.\sqrt[3]{4}$



c. l is evenwijdig met $m : y = 1\frac{1}{8}x \Rightarrow$ r.c $_l = 1\frac{1}{8} \Rightarrow f'(x) = 1\frac{1}{8}$

$\Rightarrow \dfrac{9-4,5x.\sqrt{x}}{(x\sqrt{x}+1)^2}=\dfrac{9}{8} \Rightarrow 9.(x\sqrt{x}+1)^2=-36x\sqrt{x}+72 \Leftrightarrow$

$-4x\sqrt{x}+8=x^3+2x\sqrt{x}+1 \Leftrightarrow \quad x^3+6x\sqrt{x}-7=0$ **stel** $\boldsymbol{x.\sqrt{x}=p} \Rightarrow$

$p^2+6p-7=0 \Leftrightarrow (p+7)(p-1)=0 \Leftrightarrow p=-7$ of $p=1 \Rightarrow x.\sqrt{x}=-7$ of $x.\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow$ geen oplossing of $x=1 \Rightarrow x_B=1$ dan $y_B=9/2=4,5 \Rightarrow B(1\ ;\ 4,5)$

43.

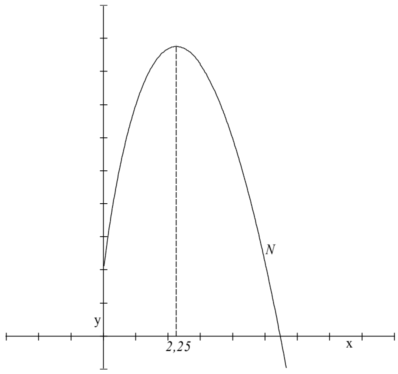
a. $N=90t-40t.\sqrt{t}+20=90t-40t^{1,5}+20 \Rightarrow \dfrac{dN}{dt}=90-60\sqrt{t}$

$\left[\dfrac{dN}{dt}\right]_{t=1}=90-60=30 \Rightarrow$ De snelheid waarmee het aantal auto's per minuut toeneemt om 8 uur in de morgen is 30 auto's per uur.

b. Meeste auto's per minuut $\Rightarrow$ we zoeken het maximum van $N \Rightarrow$

$\dfrac{dN}{dt}=0 \Rightarrow 90-60\sqrt{t}=0 \Leftrightarrow \sqrt{t}=1,5 \Rightarrow t=2,25$

Uit de schets blijkt dus dat er op $t = 2,25$ dus om 9.15 uur een maximum is . Er passeren dan dus de meeste auto's per minuut.



c. 1 auto per 2 minuten $\Rightarrow$ 30 auto's per uur $\Rightarrow$

$\dfrac{dN}{dt}=-30 \Leftrightarrow 90-60.\sqrt{t}=-30 \Leftrightarrow \sqrt{t}=2 \Rightarrow t=4 \Rightarrow$

dus om 11.00 uur.

44. Gegeven $f_p(x)=x^3+px^2$

a. $f_2(x)=x^3+2x^2 \Rightarrow f_2'(x)=3x^2+4x$

$f_5(x)=x^3+5x^2 \Rightarrow f_5'(x)=3x^2+10x$

b. $f_p(x)=x^3+px^2 \Rightarrow f_p'(x)=3x^2+2px$

45. Gegeven: $f_p(x)=-\frac{1}{4}x^2+px+3 \Rightarrow$

$f_p'(x)=-\frac{1}{2}x+p \Rightarrow f_p'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x+p=0 \Leftrightarrow p=\frac{1}{2}x$

46. $f_p(x)=\frac{1}{3}x^3+px^2+5$ Voor de top geldt :

$f_p'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+2px=0 \Leftrightarrow x(x+2p)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-2p$

Als $x = 0$ dan $y = 5$ Dan krijgen we alleen een punt .

Als $x = -2p \Rightarrow p = -0{,}5x$ Dit nu invullen in de gegeven formule $\Rightarrow$

$y = \frac{1}{3}x^3 + (-\frac{1}{2}x).x^2 + 5 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{6}x^3 + 5$ Dit is de gevraagde kromme.

Opmerking: Het punt (0,5) ligt ook op deze kromme.

47.

$$f_p(x) = \frac{px}{x^2+4} \Rightarrow f_p'(x) = \frac{p.(x^2+4) - 2x.px}{(x^2+4)^2} = \frac{px^2+4p-2px^2}{(x^2+4)^2} = \frac{4p-px^2}{(x^2+4)^2} \Rightarrow$$

$f_p'(x) = 0 \Rightarrow 4p - px^2 = 0 \Leftrightarrow p.(4 - x^2) = 0 \Leftrightarrow p = 0 \vee x = 2 \vee x = -2$

Als $p = 0$ dan $f_p(x) = 0 \Rightarrow$ grafiek is horizontaal en heeft dus geen toppen.

$\Rightarrow$ voor alle toppen geldt : $x = 2 \vee x = -2$ en dit zijn de vergelijkingen van twee verticale lijnen.

48.

a. $$f_p(x) = \frac{x+p}{x^2+4} \Rightarrow f_p'(x) = \frac{1.(x^2+4) - 2x.(x+p)}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2+4-2x^2-2px}{(x^2+4)^2} = \frac{-x^2-2px+4}{(x^2+4)^2}$$

Extreme waarde voor $x = 1 \Rightarrow f_p'(1) = 0 \Rightarrow \frac{-1-2p+4}{25} = 0 \Rightarrow 3 - 2p = 0 \Leftrightarrow p = 1{,}5$

$\Rightarrow f_{1,5}(x) = \frac{x+1{,}5}{x^2+4} \Rightarrow f_{1,5}'(x) = \frac{-x^2-3x+4}{(x^2+4)^2}$

Extreme waarde $\Rightarrow f_{1,5}'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$(x + 4)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1$

Zie de schets : $\Rightarrow$ min $f_{1,5}(-4) = -\frac{1}{8}$ is de andere extreme waarde.

c. Voor alle toppen geldt : $f_p'(x) = 0 \Rightarrow$

$-x^2 - 2px + 4 = 0 \Leftrightarrow 2px = 4 - x^2 \Leftrightarrow p = \frac{4-x^2}{2x}$

Verder geldt $y = \frac{x+p}{x^2+4}$ Uit deze twee betrekkingen volgt :

$$y = \frac{x + \frac{4-x^2}{2x}}{x^2+4}.\frac{2x}{2x} = \frac{2x^2+4-x^2}{2x.(x^2+4)} = \frac{x^2+4}{2x.(x^2+4)} = \frac{1}{2x} \Rightarrow$$

Alle toppen liggen dus op de kromme : $y = \frac{1}{2x}$

49. Zie de figuur in het boek.

Nu heeft deze vergelijking slechts het linker snijpunt $\Rightarrow$ 1 oplossing.

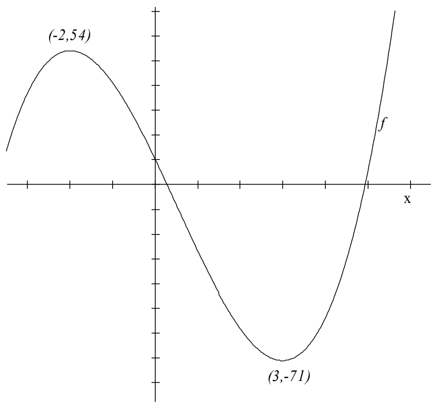
Bij de laatste vergelijking hebben we het raakpunt en een snijpunt rechts als 2[e] oplossing $\Rightarrow$ 2 oplossingen.

50.

a. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 \Rightarrow$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$(x - 3)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$ en $f(3) = -71$ en



$f(-2) = 54$ Zie ook de schets $\Rightarrow$
de toppen zijn (3 , -71) en (-2 , 54)

b. $f(x) = 25$ heeft 3 snijpunten met f $\Rightarrow$ 3 oplossingen
$f(x) = 75$ heeft 1 snijpunt met f $\Rightarrow$ 1 oplossing.

c. Als p tussen -71 en 54 ligt dan heeft de horizontale lijn drie snijpunten met de grafiek van $f \Rightarrow$ de vergelijking $f(x) = p$ voor $-71 < p < 54$ heeft dus drie oplossingen.

d. $f(x) = p$ heeft één oplossing als er slechts 1 snijpunt is met de grafiek van $f \Rightarrow$ bij alle waarden van p met $p < -71$ of $p > 54$

e. Twee oplossingen krijg je als de horizontale lijn de grafiek van f raakt $\Rightarrow$ bij $p = -71$ of $p = 54$

51.

a. $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 24x + 10 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 - 6x + 24$ Extreme waarden $\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow$
$-3x^2 - 6x + 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x + 4)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 2$
Uit de schets volgt verder:
min. $f(-4) = -70$ en max. $f(2) = 38$

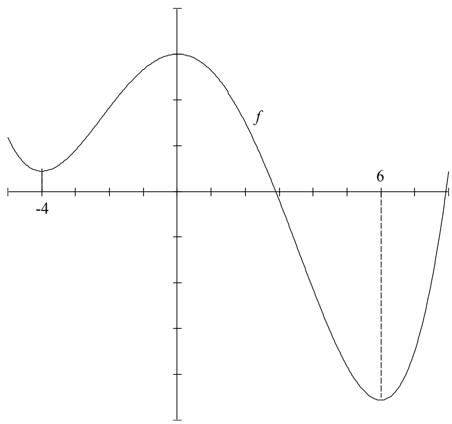
b. $f(x) = -50$ (dus tussen -70 en 38) heeft drie snijpunten met f $\Rightarrow$ 3 oplossingen.

$f(x) = 50$ heeft 1 snijpunt met de grafiek van $f \Rightarrow$
$f(x) = 50$ heeft dus één oplossing.

c. $f(x) = p$ heeft drie oplossingen als de horizontale lijn tussen de twee toppen ligt dus voor $-70 < p < 38$

d. $f(x) = p$ heeft 1 oplossing dus als $p < -70$ of $p > 38$

52. Eerst de extreme waarden van f berekenen.
$f(x) = 0{,}75x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 300 \Rightarrow f'(x) = 3x^3 - 6x^2 - 72x$
extreme waarden $\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow$
$3x(x^2 - 2x - 24) = 0 \Leftrightarrow 3x(x-6)(x+4)=0 \Leftrightarrow$
$x = 0 \vee x = 6 \vee x = -4$ Uit de schets volgt dus verder:
min. $f(-4) = 44$ en max. $f(0) = 300$ en
min. $f(6) = -456$



Nu weer kijken naar het aantal snijpunt met de horizontale lijn $y = p \Rightarrow$
4 oplossingen voor $44 < p < 300$
3 oplossingen voor $p = 300 \vee p = 44$
2 oplossingen voor $p > 300 \vee -456 < p < 44$
1 oplossing voor $p = -456$
0 oplossingen voor $p < -456$

53. Gegeven $f(x) = x^2.\sqrt{2x+5} - 6$

a. Top van de grafiek $\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x.\sqrt{2x+5} + x^2.\dfrac{1}{2\sqrt{2x+5}}.2 = 0 \Leftrightarrow$

$$2x\sqrt{2x+5} + \frac{x^2}{\sqrt{2x+5}} = 0 \Leftrightarrow x\left(2\sqrt{2x+5} + \frac{x}{\sqrt{2x+5}}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

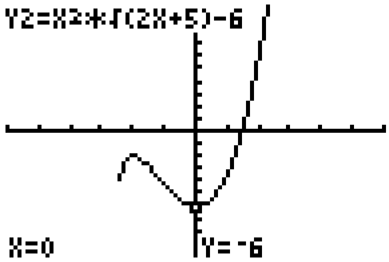
$x = 0 \vee \left(2\sqrt{2x+5} + \dfrac{x}{\sqrt{2x+5}}\right) = 0$ (verm met $\sqrt{(2x+5)}$) $\Rightarrow x = 0 \vee 2(2x+5) + x = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0 \vee 5x = -10 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$

Schets: $\Rightarrow$ 1ᵉ top : (-2 , -2) en 2ᵉ top : (0 , -6)

Verder geldt : $f(-2{,}5) = -6$

De GR geeft de schets niet goed weer !!!



b. $f(x) = p$

geen oplossingen voor $p < -6$

één oplossing voor $p > -2$

twee oplossingen voor $p = -6 \vee p = -2$

drie oplossingen voor $-6 < p < -2$.

54. Gegeven $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+3}$ en $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$ en $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$

a. Bij het raken krijgen we 1 samenvallende oplossing en verder is er duidelijk nog een 2ᵉ snijpunt. Dit is het geval als de constante is $\frac{3}{4}$ of $-\frac{3}{4}$. Door nu de bovenste lijn te verschuiven is duidelijk te zien dat er dan slechts één snijpunt blijft.

b. Drie snijpunten krijg je in het tussengebied. Dus voor $-\frac{3}{4} < p < \frac{3}{4}$.

55. a.

$$f(x) = \frac{x-2}{x-3} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1.(x-3) - 1.(x-2)}{(x-3)^2} = \frac{x-3-x+2}{(x-3)^2} = \frac{-1}{(x-3)^2}$$

r.c. $= -\frac{1}{4} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$$\frac{-1}{(x-3)^2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow (x-3)^2 = 4$$

$\Leftrightarrow x-3 = 2 \vee x-3 = -2$

$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = 1$

De raakpunten moeten dus zijn A $(5 , f(5)) = (5 ; 1{,}5)$ en B$(1 , f(1)) =$ $(1 ; 0{,}5)$ Stel de vergelijking van de raaklijn is : $y = -\frac{1}{4}x + b$ door A $\Rightarrow$

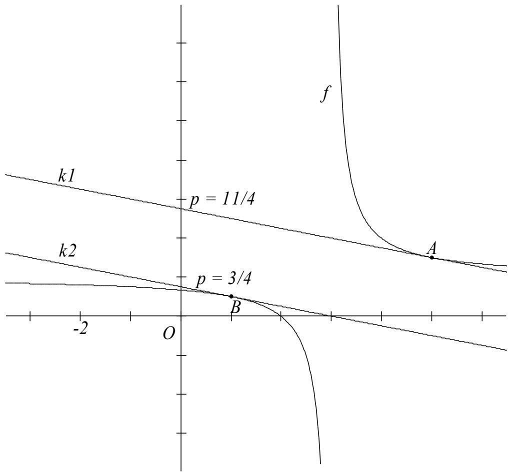
$1{,}5 = -\frac{5}{4} + b \Rightarrow b = \frac{11}{4} \Rightarrow$ raaklijn door A is : $y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{4}$

Stel de raaklijn door B is : $y = -\frac{1}{4}x + b$ door B $\Rightarrow$

$0{,}5 = -\frac{1}{4} + b \Rightarrow b = \frac{3}{4} \Rightarrow$ de vergelijking van de raaklijn door B is dus : $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

b. We tekenen de grenssituatie met de 2 raaklijnen: Uit de schets lezen we af dat er geen snijpunten zijn als de lijnen liggen tussen de 2 getekende raaklijnen.
$\Rightarrow$ de vergelijking $f(x) = -\frac{1}{4}x + p$ heeft geen oplossingen als geldt :

$\frac{3}{4} < p < \frac{11}{4}$

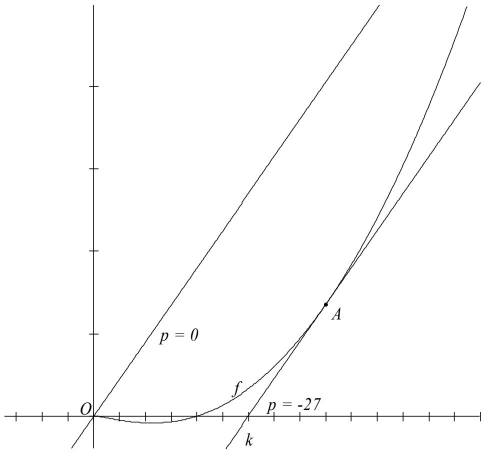


56.

a. $f(x) = 0,5x^2 - x\sqrt{x} = 0,5x^2 - x^{1,5} \Rightarrow f'(x) = x - 1,5x^{0,5} = x - 1,5\sqrt{x}$ r.c.$_k$ = 4,5 $\Rightarrow$
$x - 1,5\sqrt{x} = 4,5$ Stel $\sqrt{x} = p \Rightarrow p^2 - 1,5p - 4,5 = 0$ D = $(-1,5)^2 - 4.1.(-4,5) = 20,25 \Rightarrow$
$p = \dfrac{1,5 + 4,5}{2}$ of $p = \dfrac{1,5 - 4,5}{2} \Leftrightarrow p = 3 \vee p = -1,5 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \vee \sqrt{x} = -1,5$ (kan niet) $\Rightarrow$
$x = 9$ Stel de vergelijking is : $y = 4,5x + b$ door het punt A(9 , f(9)) = (9 ; 13,5) $\Rightarrow$
$13,5 = 4,5 \,.\, 9 + b \Rightarrow b = -27 \Rightarrow$ de vergelijking van k is dus : $y = 4,5x - 27$

b. Teken de situatie dan zie je bij $p = -27$ de getekende raaklijn. Als we deze raaklijn naar links verschuiven dan heb je 2 oplossingen. Dit gaat door totdat de lijn door de oorsprong gaat dan is p=0 Er zijn dan nog net 2 oplossingen . Bij verdere verschuiving naar links zien we dat er geen oplossingen zijn. $\Rightarrow$ 2 oplossingen zijn er als geldt : $-27 < p \leq 0$

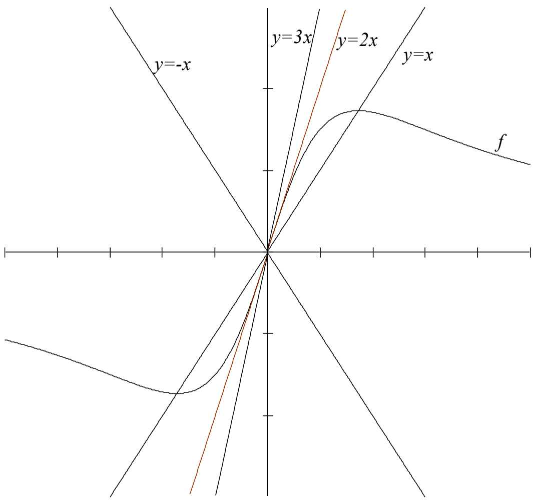
2



57.

a. Zie schets: $y = x$ heeft 3 snijpunten met f.
$y = 3x$ heeft 1 snijpunt met f.
$y = -x$ heeft ook 1 snijpunt met f.

c. Als $0 < a < 2$, dan ligt de lijn tussen de x-as en de raaklijn $y = 2x$ Er zijn dan dus 3 snijpunten met de grafiek van f.



58.

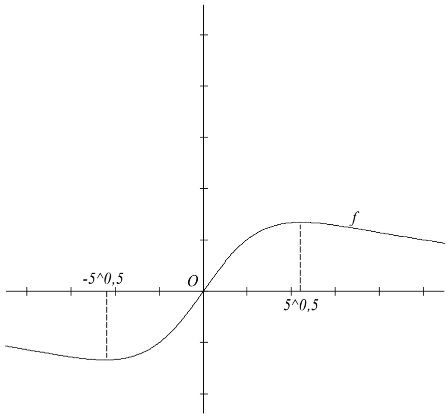
a. $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+5} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{6.(x^2+5) - 2x.6x}{(x^2+5)^2} = \dfrac{6x^2+30-12x^2}{(x^2+5)^2} = \dfrac{30-6x^2}{(x^2+5)^2} \Rightarrow$

extreme waarden $\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 30 = 6x^2 \Leftrightarrow x^2 = 5$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$
Uit de schets blijkt :

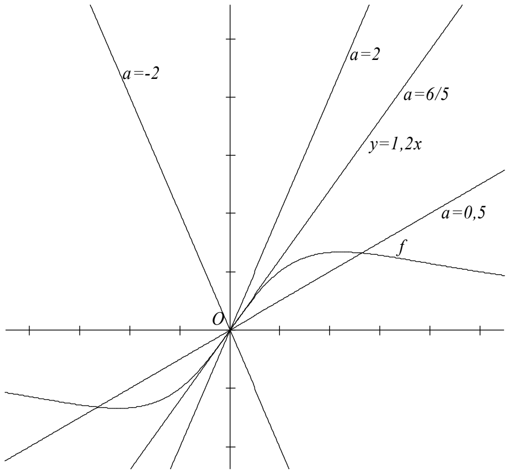
min $f(-\sqrt{5}) = \dfrac{-6\sqrt{5}}{5+5} = -\frac{3}{5}\sqrt{5}$

en max. $f(\sqrt{5}) = \dfrac{6\sqrt{5}}{5+5} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$

$\Rightarrow B_f = [-\frac{3}{5}\sqrt{5}, \frac{3}{5}\sqrt{5}]$



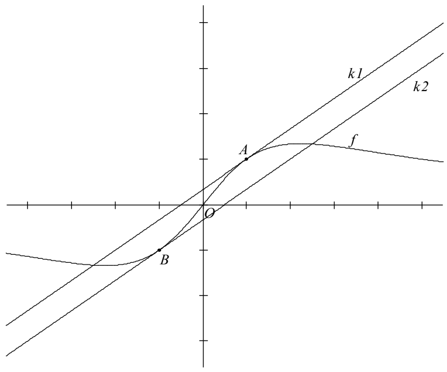
b. $f(x) = ax$ is een bundel van lijnen door O.
1 oplossing krijgen we als zo'n lijn raaklijn is met de grafiek van f. $\Rightarrow$ r.c.$= f'(0) = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$. Als de r.c. a tussen 0 en $\frac{6}{5}$ ligt dan hebben we 3 snijpunten . Dus 1 snijpunt kijgen we als $a \leq 0$ of $a \geq \frac{6}{5}$



c. De grenssituatie krijgen we als $y = \frac{2}{3}x + p$ de grafiek van f raakt $\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$$\frac{30-6x^2}{(x^2+5)^2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2(x^2+5)^2 = 3.(30-6x^2) \Leftrightarrow$$

$2x^4 + 20x^2 + 50 = -18x^2 + 90 \Leftrightarrow 2x^4 + 38x^2 - 40 = 0$
$\Leftrightarrow x^4 + 19x^2 - 20 = 0$ stel $\boldsymbol{x^2 = p} \Rightarrow$
$p^2 + 19p - 20 = 0 \Leftrightarrow (p+20)(p-1) = 0 \Leftrightarrow p = -20 \vee$
$p = 1 \Leftrightarrow x^2 = -20$ (geen oplossing) $\vee x = 1 \vee x = -1 \Rightarrow$
de raakpunten zijn :
A(1 , $f(1)$) = (1 , 1) en B(-1 , $f(-1)$) = (-1 , -1)



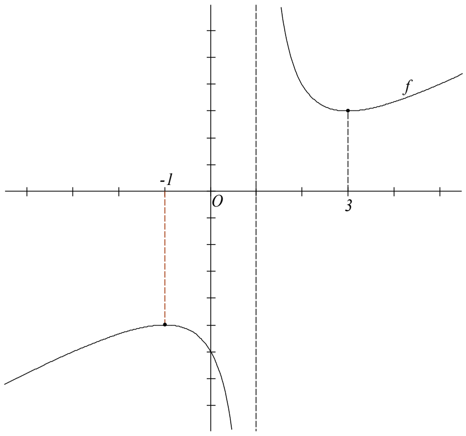
Nu de vergelijkingen van de raaklijnen :
Stel de vergelijking is: $y = \frac{2}{3}x + b$ door A $\Rightarrow 1 = \frac{2}{3} + b \Rightarrow b = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$
Raaklijn door punt B $\Rightarrow y = \frac{2}{3}x + b$ door B $\Rightarrow -1 = -\frac{2}{3} + b \Rightarrow b = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$
Nu aflezen in de grafiek $\Rightarrow$ drie snijpunten als de lijn $y = \frac{2}{3}x + p$ tussen de twee raaklijnen komt te liggen. $\Rightarrow$ 3 oplossingen voor $-\frac{1}{3} < p < \frac{1}{3}$

59.

a. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(2x-3).(x-1) - 1.(x^2 - 3x + 6)}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2 - 2x - 3x + 3 - x^2 + 3x - 6}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$ extreme waarden $\Rightarrow$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3 \vee x = -1$
Uit de schets volgt:
min. $f(3) = 3$ en max. $f(-1) = -5$

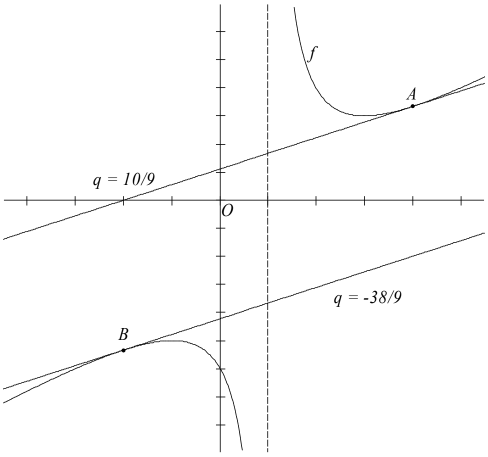


$\Rightarrow$ minstens één oplossing als de horizontale lijn boven of op het relatieve minimum zit of onder of op het relatieve maximum zit. $\Rightarrow$
dit geldt dus voor : $p \geq 3$ of $p \leq -5$

b. Nu weer eerst de raaklijnen bepalen aan f met r.c. $\frac{5}{9} \Rightarrow$

$\dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \dfrac{5}{9} \Leftrightarrow 9.(x^2 - 2x - 3) = 5.(x-1)^2$

$9x^2 - 18x - 27 = 5x^2 - 10x + 5 \Leftrightarrow$
$4x^2 - 8x - 32 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow$
$(x - 4)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -2$
Nu de raaklijnen : stel $y = \frac{5}{9}x + b$ door
A $(4, f(4)) = (4, \frac{10}{3}) \Rightarrow \frac{10}{3} = \frac{5}{9} . 4 + b \Rightarrow b = \frac{10}{9} \Rightarrow$
de vergelijking is: $y = \frac{5}{9}x + \frac{10}{9}$
Nu de raaklijn door B$(-2, f(-2)) = (-2, -\frac{16}{3}) \Rightarrow$
$-\frac{16}{3} = \frac{5}{9} . (-2) + b \Rightarrow b = -\frac{38}{9} \Rightarrow y = \frac{5}{9}x - \frac{38}{9}$ $\Rightarrow$ Uit de schets volgt dat : $-\frac{38}{9} < q < \frac{10}{9}$

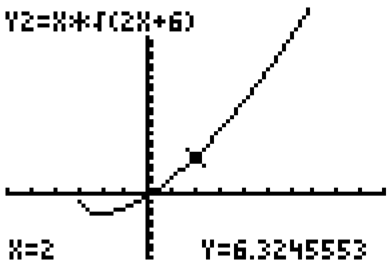


60. Gegeven $f(x) = x.\sqrt{2x + 6}$

a. Eerst van f de extreme waarde(n) berekenen. $\Rightarrow f'(x) = 1.\sqrt{2x+6} + x.\dfrac{1}{2\sqrt{2x+6}}.2 \Rightarrow$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1.\sqrt{2x+6} + \dfrac{x}{\sqrt{2x+6}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+6} = \dfrac{-x}{\sqrt{2x+6}}$ kruislings $\Rightarrow$

$2x + 6 = -x \Leftrightarrow 3x = -6 \Leftrightarrow x = -2$ voldoet.
Zie de schets. $\Rightarrow$ min $f(-2) = -2\sqrt{2}$
Nu $f(x) = p$
Twee oplossingen voor $-2\sqrt{2} < p \leq 0$



b. Eerst de raaklijn berekenen met r.c = 1,5 $\Rightarrow$

$f'(x) = 1{,}5 \Rightarrow \sqrt{2x+6} + \dfrac{x}{\sqrt{2x+6}} = 1{,}5$ vermenigvuldigen

met $\sqrt{(2x + 6)} \Rightarrow$
$2x + 6 + x = 1{,}5.\sqrt{(2x + 6)} \Leftrightarrow 3x + 6 = 1{,}5.\sqrt{(2x + 6)}$ Nu alles maal 2/3 $\Rightarrow$

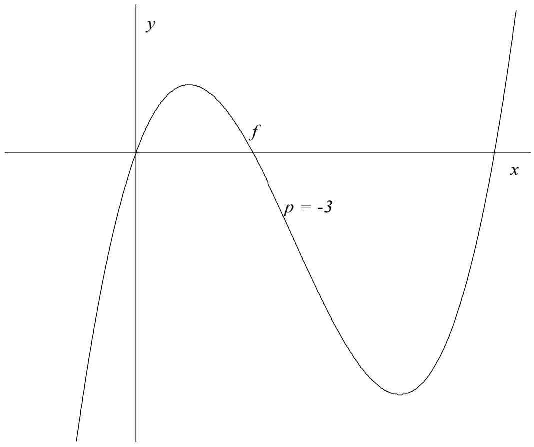
$2x + 4 = \sqrt{}(2x + 6)$ Kwadrateren $\Rightarrow 4x^2 + 16x + 16 = 2x + 6$ $4x^2 + 14x + 10 = 0$
$2x^2 + 7x + 5 = 0 \Rightarrow D = 49 - 4.2.5 = 9 \Rightarrow x = -1$ (voldoet) $\vee$ $x = -2{,}5$ (voldoet niet)
$\Rightarrow$ Raakpunt $(-1\ , f(-1)) = (-1\ , -2)$ Nu dit punt invullen in de vergelijking van $y = 1{,}5x + q \Rightarrow$
$-2 = -1{,}5 + q$ $q = -0{,}5$
Als we naar boven gaan schuiven dan hebben we 2 snijpunten met f totdat de lijn het punt $(-3,0)$ passeert. Dan hoort hierbij $q = 0 - 1{,}5.(-3) = 4{,}5$
Conclusie: Twee snijpunten als $-0{,}5 < q < 4{,}5$.

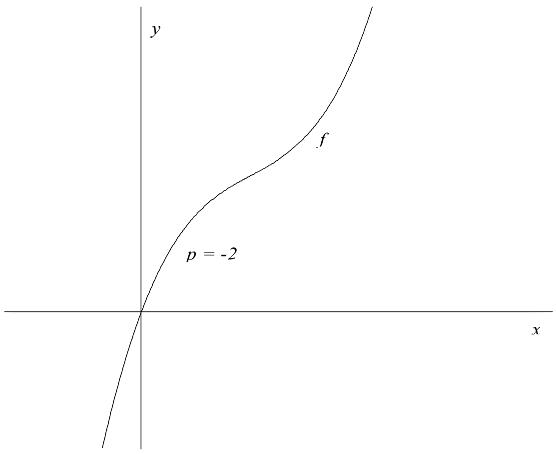
b. Eerst weer $y = ax$ raken met f. $\Rightarrow$ Raakpunt is duidelijk $(0,0) \Rightarrow f'(0) = \sqrt{6} \Rightarrow a = \sqrt{6}$
Als a toeneemt hebben we 2 snijpunten.
Als a afneemt hebben we ook 2 snijpunten t/m $a = 0$.
Conclusie 2 snijpunten voor $a > 0$ en $a \neq \sqrt{6}$.

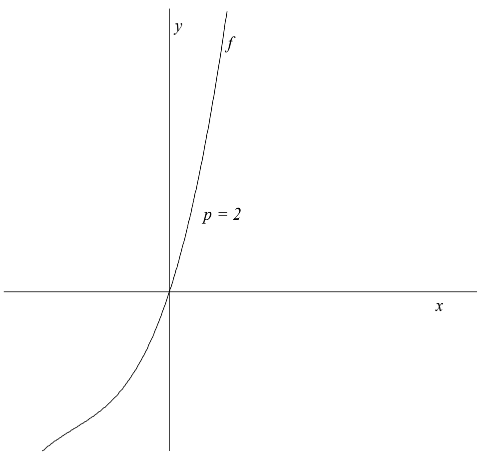
61.

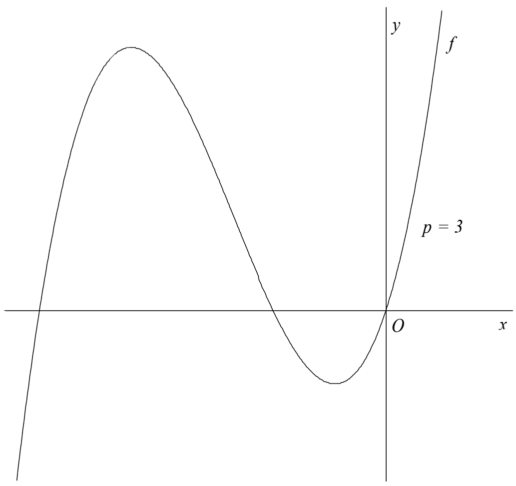
$$f_p(x) = \tfrac{1}{3}x^3 + px^2 + 5x$$

a.





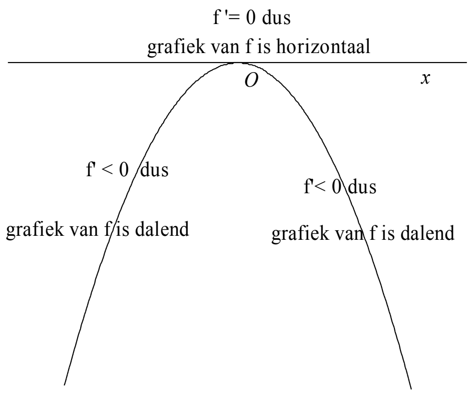


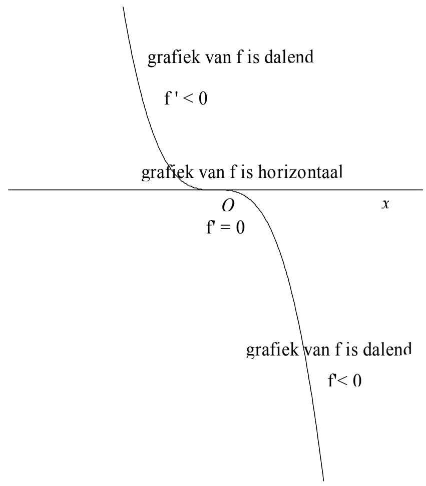


b. f_{-3} heeft 2 extreme waarden ; f_{-2} heeft geen extreme waarden
f_2 heeft geen extreme waarden en f_3 heeft 2 extreme waarden.

62. Als $p > 0{,}5$ dan $D < 0 \Rightarrow f\text{'}(x)$ heeft dan geen oplossingen $\Rightarrow f$ heeft dan dus geen extreme waarden.

Als $p = 0{,}5$ dan $D = 0 \Rightarrow f\text{'}(x) = -0{,}5x^2 + x - p = 0$ Dus de grafiek van $f\text{'}(x)$ is een bergparabool die dus de x-as raakt. Zie nu de figuur





grafiek van f ' | **grafiek van f**

$\Rightarrow$ Er zijn dus geen extreme waarden voor $p = 0{,}5$

63.

$$f_p(x) = -\tfrac{1}{3}x^3 - 1\tfrac{1}{2}x^2 + px + 5$$

f_p heeft 2 extreme waarden als $f\text{'}_p = 0$ twee oplossingen heeft $\Rightarrow D_{f'} > 0$

$f\text{'}(x) = -x^2 - 3x + p \Rightarrow D_{f'} = 9 - 4.(-1).p > 0 \Leftrightarrow 9 + 4p > 0 \Leftrightarrow p > -2{,}25$

64. $f_p(x) = \tfrac{1}{4}x^3 + px^2 + 3x + 1 \quad \Rightarrow \quad f\text{'}(x) = \tfrac{3}{4}x^2 + 2px + 3$

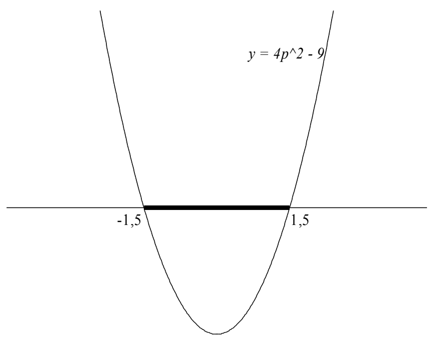
f_p heeft geen extreme waarden als geldt: f ' heeft geen nulpunten of f ' heeft dubbele nulpunten. $\Rightarrow D_{f'} \leq 0$

$\Rightarrow D = (2p)^2 - 4.\tfrac{3}{4}.3 = 4p^2 - 9 \leq 0$

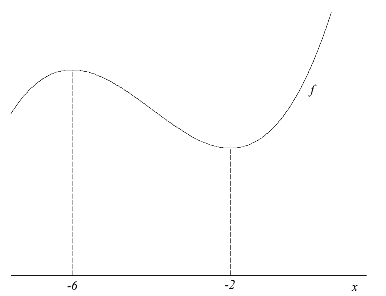
1) snijpunten : $2p = 3$ of $2p = -3 \Leftrightarrow p = 1{,}5$ of $p = -1{,}5$

2) schets:

3) nu aflezen $\Rightarrow -1{,}5 \leq p \leq 1{,}5$



65. $f_p(x) = \tfrac{1}{12}x^3 + x^2 + px + 7$



a. $f_p(x) = \frac{1}{12}x^3 + x^2 + px + 7 \;\Rightarrow\; f_p'(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + p = 0 \;\Rightarrow$

$f_p'(1) = 0$ geeft : $\frac{1}{4} + 2 + p = 0 \Leftrightarrow\; p = -2\frac{1}{4}$

$f_{-2\frac{1}{4}}'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 + 2x - 2\frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 + 8x - 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 9)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$x = -9 \vee x = 1 \Rightarrow$ De andere extreme waarde is :

maximum $f_{-2\frac{1}{4}}(-9) = 47{,}5$

b. $f_p(x)$ heeft twee extreme waarden als $D_{f'} > 0 \;\Rightarrow$

dus als f_3 ' twee nulpunten heeft. $\Rightarrow$

$f_p'(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + p$ dus $D_{f'} = 4 - 4.\frac{1}{4}.p = 4 - p > 0 \Leftrightarrow p < 4$

66. $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 + px^2 + 5x - 3$

a. raken $\Rightarrow$ r.c. raaklijn $= f_p'(x) = 2$ met $x_A = 3 \Rightarrow f_p'(3) = 2$

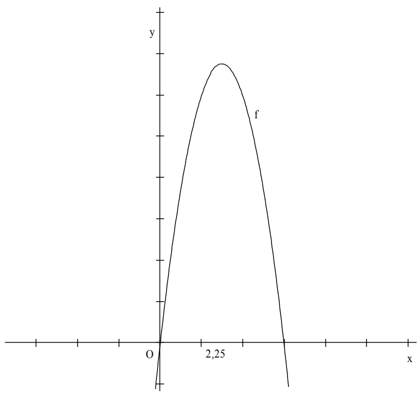
b. $f_p'(x) = x^2 + 2px + 5$ er geldt dus $f_p'(3) = 2 \Rightarrow 3^2 + 2.p.3 + 5 = 2 \Leftrightarrow 6p = -12 \Leftrightarrow p = -2$

67. $f_p(x) = 6x\sqrt{x} + px^2 = 6x^{1,5} + px^2$

a. maximum voor $x = 2\frac{1}{4} \Rightarrow f'(2\frac{1}{4}) = 0 \quad f'(x) = 9x^{0,5} + 2px = 9\sqrt{x} + 2px$ Nu $x = 2\frac{1}{4}$ invullen $\Rightarrow$

$9.\sqrt{(2\frac{1}{4})} + 2p.2\frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow 9 . 1{,}5 + 4{,}5p = 0 \Leftrightarrow 4{,}5p = -13{,}5 \Leftrightarrow p = -3$

Nu nog de schets voor de controle dat we bij $p = -3$ inderdaad een maximum hebben en dus geen minimum. Zie de schets , er is inderdaad bij $x = 2{,}25$ een maximum Dus $p = -3$ voldoet.



b. $k : y = 5x + q$ raakt grafiek in A met $x_A = 1 \Rightarrow f_p'(1) = 5$

$\Rightarrow 9 . \sqrt{1} + 2p. 1 = 5 \Leftrightarrow 9 + 2p = 5 \Leftrightarrow 2p = -4 \Leftrightarrow$

$p = -2$ Nu het raakpunt A berekenen met $f_{-2}(x) \Rightarrow$

$f_{-2}(1) = 6.1.\sqrt{1} - 2.1^2 = 6 - 2 = 4 \Rightarrow A(1 , 4)$

A ligt op $k \Rightarrow 4 = 5 . 1 + q \Leftrightarrow q = -1 \Rightarrow$

$p = -2$ en $q = -1$

68. $f_p(x) = \dfrac{4x + p}{x^2 + 1}$

a. Nodig : $f_p'(x) = \dfrac{4.(x^2+1) - 2x.(4x+p)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x^2 + 4 - 8x^2 - 2px}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-4x^2 - 2px + 4}{(x^2+1)^2}$

Snijpunt y-as met de gegeven grafiek is $(0 , p)$ en het snijpunt van k met de y-as is $(0 , 4) \Rightarrow$ $p = 4$

Verder geldt : $a = f_4'(0) = \dfrac{4}{1} = 4$ Conclusie: $a = 4$ en $p = 4$

b. Stel l is : $y = -x + b$ l raakt f_p in A met $x_A = -1$ $\Rightarrow$ r.c. $_l = -1 = f_p'(-1)$ $\Rightarrow$

$$\frac{-4.(-1)^2 - 2p.(-1) + 4}{((-1)^2 + 1)^2} = -1$$

$\Leftrightarrow \dfrac{-4 + 2p + 4}{4} = -1 \Leftrightarrow \dfrac{2p}{4} = -1 \Leftrightarrow 2p = -4 \Leftrightarrow p = -2$ Verder geldt : raakpunt is bij $x = -1$

$\Rightarrow f_{-2}(x) = \dfrac{4x - 2}{x^2 + 1}$ $\Rightarrow f_{-2}(-1) = \dfrac{-6}{2} = -3 \Rightarrow$ A(-1 , -3) A ligt op $l \Rightarrow -3 = -(-1) + b \Rightarrow$

$b = -4$ $\Rightarrow$

De vergelijking van l is nu : $y = -x - 4$.

c. Extreme waarde bij $x = 2$ $\Rightarrow f_p'(2) = 0 \Rightarrow$

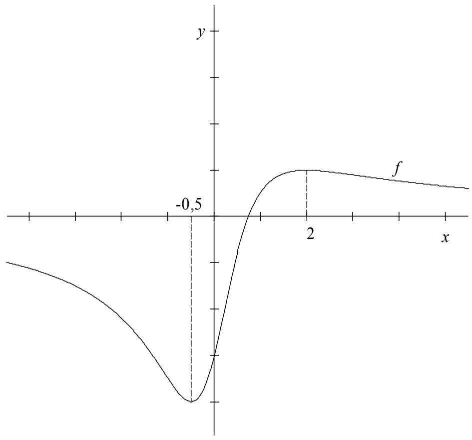
$\dfrac{-4.4 - 2p.2 + 4}{(4 + 1)^2} = 0 \Rightarrow -16 - 4p + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$4p = -12 \Leftrightarrow p = -3$ Nu nog de andere extreme waarde $\Rightarrow$

$f_{-3}'(x) = \dfrac{-4x^2 + 6x + 4}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow$

$-4x^2 + 6x + 4 = 0$ D = 36 – 4.(-4).4 = 36 + 64 = 100 $\Rightarrow$

$x = \dfrac{-6 + 10}{-8} \vee x = \dfrac{-6 - 10}{-8}$ $\Leftrightarrow x = -0{,}5 \vee x = 2$ Nu de schets van de functie f_{-3} $\Rightarrow$ de tweede extreme waarde is dus een minimum met $f_{-3}(-0{,}5) = -4$



69. Gegeven $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 + px^2 - 3x - p$

a. Voor elke p 2 extreme waarden $\Rightarrow f'(x)$ heeft voor elke p 2 oplossingen . $\Rightarrow$
$f'(x) = x^2 + 2px - 3$ 2 oplossingen $\Rightarrow D > 0 \Rightarrow (2p)^2 - 4.1.(-3) > 0 \Leftrightarrow 4p^2 + 12 > 0$
Dit klopt altijd want een kwadraat is altijd positief. Het klopt dus voor elke p.

b. Extreme waarde voor $x = 3$ $\Rightarrow f_p'(3) = 0 \Leftrightarrow 3^2 + 2p.3 - 3 = 0 \Leftrightarrow 6p = -6 \Leftrightarrow p = -1 \Rightarrow$
$f_{-1}'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (al gegeven) $\vee x = -1 \Rightarrow$
De andere extreme waarde is $f_{-1}(-1) = 2\frac{2}{3}$

c. l: $y = -x + q$ raakt de grafiek van $f_p \Rightarrow f_p'(x) = -1$ en het raakpunt is gemeenschappelijk. $\Rightarrow$
$x^2 + 2px - 3 = -1$ en ook geldt dat $x = -2 \Rightarrow 4 - 4p - 3 = -1 \Leftrightarrow 4p = 2 \Leftrightarrow$ **$p = 0{,}5$**
Het raakpunt B is $f_{0,5}(-2) = \frac{1}{3}(-2)^3 + 0{,}5(-2)^2 - 3(-2) - 0{,}5 = -\frac{8}{3} + 2 + 6 - \frac{1}{2} = 4\frac{5}{6}$
$\Rightarrow$ B(-2 , $4\frac{5}{6}$) Dit punt ligt ook op lijn $l \Rightarrow 4\frac{5}{6} = 2 + q \Rightarrow$ **$q = 2\frac{5}{6}$**

70. Gegeven : $f_p(x) = \dfrac{9.\sqrt{x^2 + p}}{x^2 + 2}$

Stel de vergelijking van k is : $y = 2{,}5x + b$ Raken $\Rightarrow f_p'(x) = 2{,}5$ in $x = -1$

$$f_p'(x) = \frac{9.\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+p}}.2x.(x^2+2) - 2x.9.\sqrt{x^2+p}}{(x^2+2)^2}$$ Nu $x = -1$ invullen $\Rightarrow$

$$f_p'(-1) = \frac{9.\dfrac{1}{2\sqrt{(-1)^2+p}}.2(-1).((-1)^2+2) - 2.(-1).9.\sqrt{(-1)^2+p}}{((-1)^2+2)^2} = 2{,}5 \Leftrightarrow$$

$$\frac{9.\dfrac{1}{2\sqrt{(-1)^2+p}}.2(-1).((-1)^2+2) - 2.(-1).9.\sqrt{(-1)^2+p}}{((-1)^2+2)^2} = 2{,}5 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\dfrac{-27}{\sqrt{1+p}} + 18.\sqrt{1+p}}{9} = 2{,}5 \Leftrightarrow \frac{-3}{\sqrt{1+p}} + 2\sqrt{1+p} = 2{,}5 \quad \Rightarrow$$

$-3 + 2(1 + p) = 2{,}5.\sqrt{(1 + p)} \Leftrightarrow 2p - 1 = 2{,}5\sqrt{(1 + p)} \Leftrightarrow 4p - 2 = 5.\sqrt{(1 + p)}$ kwadrateren $\Rightarrow$
$16p^2 - 16p + 4 = 25 + 25p \Leftrightarrow 16p^2 - 41p - 21 = 0 \Rightarrow D = (-41)^2 - 4.16.(-21) = 3025 \Rightarrow$

$$p = \frac{41+55}{32} \vee p = \frac{41-55}{32} \Leftrightarrow p = 3 \text{ (voldoet)} \vee p = -\frac{7}{16} \text{ voldoet niet .}$$

$\Rightarrow$ Raakpunt is nu : $f_3(-1) = 6$. Dit punt ligt ook op $k \Rightarrow 6 = 2{,}5.(-1) + b \Leftrightarrow b = 8{,}5$
$\Rightarrow$ De vergelijking van k is : $y = 2{,}5x + 8{,}5$