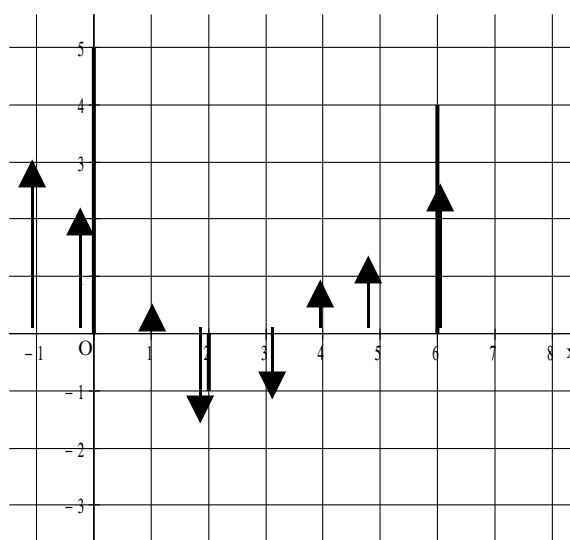


## Uitwerkingen wi vwo B1 H3 De afgeleide functie

1. Voor 1985 nam het aantal alleenstaanden steeds meer toe. Vanaf 1990 nam het aantal alleenstaanden steeds langzamer toe.
2.
  - a. toenemend stijgend op de intervallen  $< -3, 3 >$  en  $< 6,5 ; 9 >$
  - b. afnemend stijgend op  $< 3, 4 >$
  - c. toenemend dalend op :  $< 4, 5 >$
  - d. afnemend dalend op:  $< 5 ; 6,5 >$
3. We moeten de toenames en de afnames gaan tellen vanaf 1999  $\Rightarrow$   
 $79000 - 8000 + 2000 - 6000 - 7000 + 5000 = 65000 \Rightarrow$   
 In 2004 kwamen er dus 65000 woningen gereed.

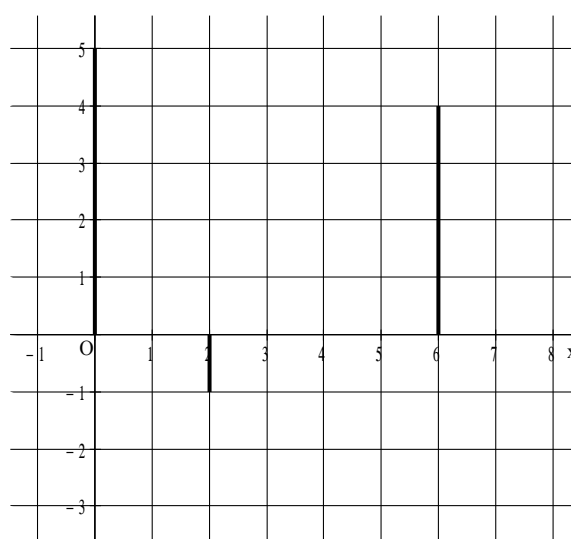
4.
  - a.  $\Delta x = 1$  en  $x$  in het interval  $[-1, 6]$

$x$	$y$	$\Delta y$
-2	-3	-
-1	0	3
0	2	2
1	2,5	0,5
2	1	-1,5
3	0	-1
4	1	1
5	2,5	1,5
6	5	2,5



- b.  $x$  op het interval  $[-2, 6]$   
met  $\Delta x = 2$

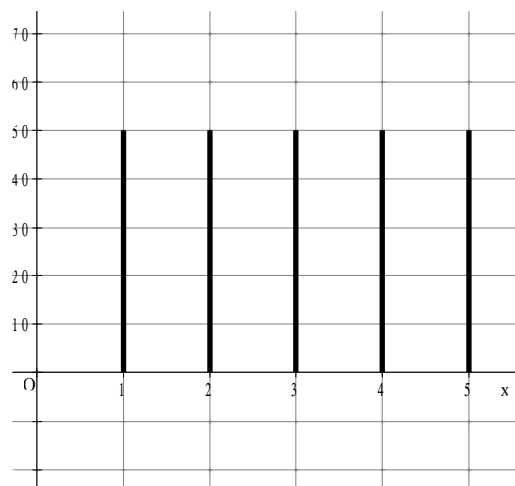
$x$	$y$	$\Delta y$
-2	-3	-
0	2	5
2	1	-1
4	1	0
6	5	4



5.a.

$x$	$y$	$\Delta y$
0	100	-
1	200	100
2	300	100
3	400	100
4	500	100
5	600	100

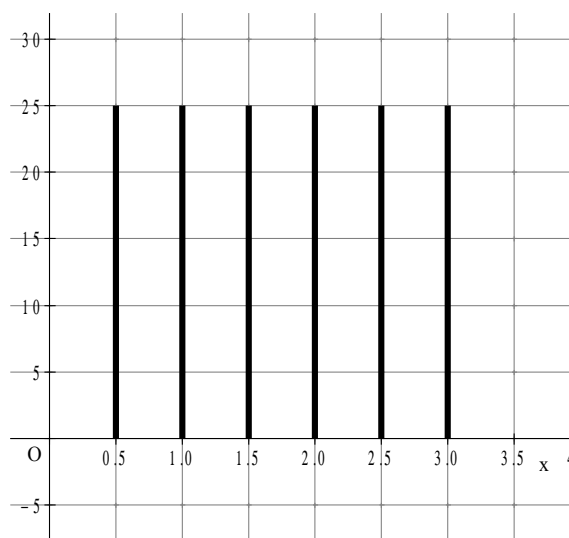
Opmerking: In de figuur moeten de verticale eenheden 2 keer zo groot zijn.



b.

$x$	$y$	$\Delta y$
0	100	-
0,5	150	50
1	200	50
1,5	250	50
2	300	50
2,5	350	50
3	400	50

Opmerking: In de figuur moeten de verticale eenheden 2 keer zo groot zijn.

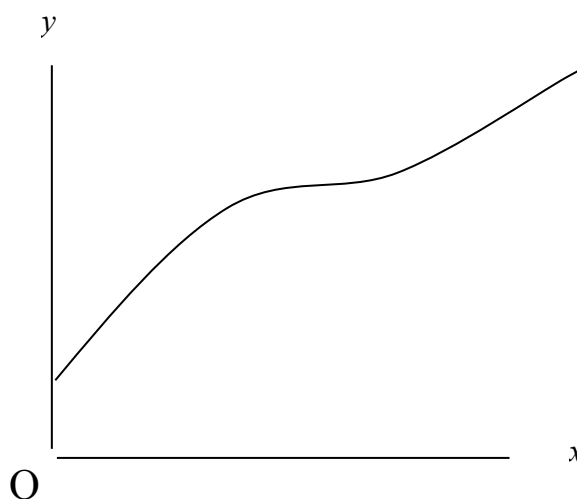


- c. De toenames zijn steeds gelijk dus de lijnstukken zijn ook gelijk.  
d. Bij een horizontale lijn zijn er geen toenames dus hebben de lijnstukken de lengte 0.

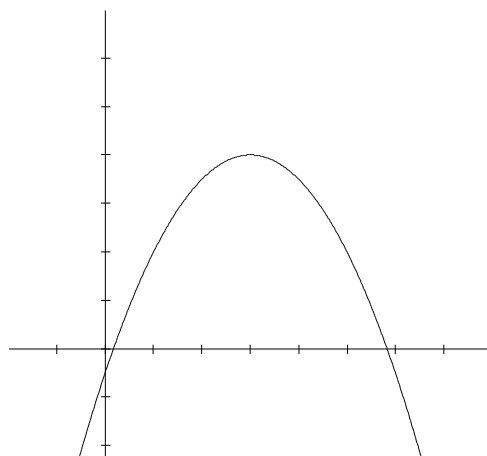
6.

- a. Steeds dezelfde afname  $\Rightarrow$  constante daling.  
b. De toename wordt steeds minder  $\Rightarrow$  afnemende stijging  
c. De toename wordt steeds meer  $\Rightarrow$  toenemende stijging  
d. De afnamen worden steeds meer  $\Rightarrow$  toenemende daling

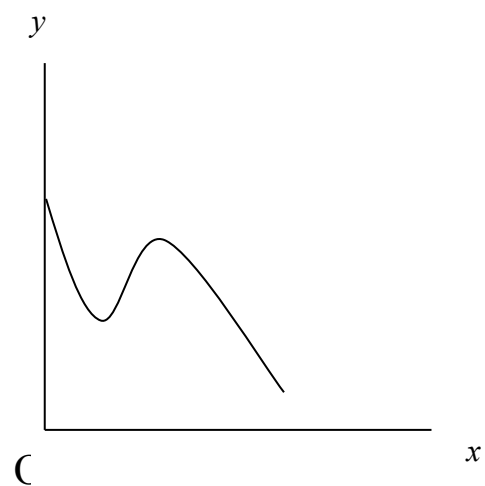
- 7a. Eerst een afnemende stijging en vervolgens een toenemende stijging en verder symmetrisch van elkaar.



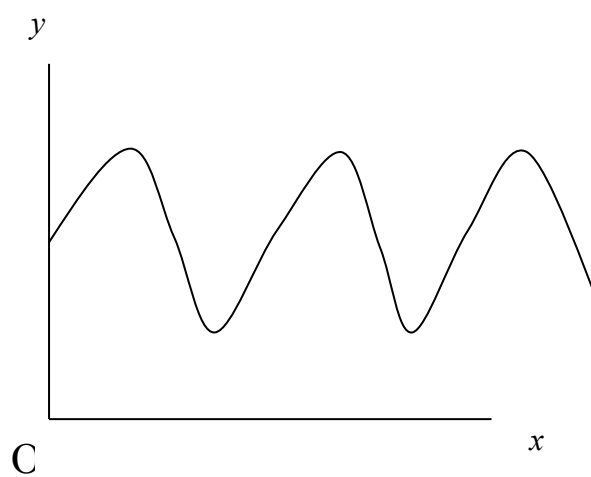
- b. Eerst een afnemende stijging en vervolgens een toenemende daling



- c. Eerst een afnemende daling, vervolgens even een lichte stijging en daarna weer een lichte daling.



- d. Eerst stijgen dan dalen en vervolgens weer stijgen enz.

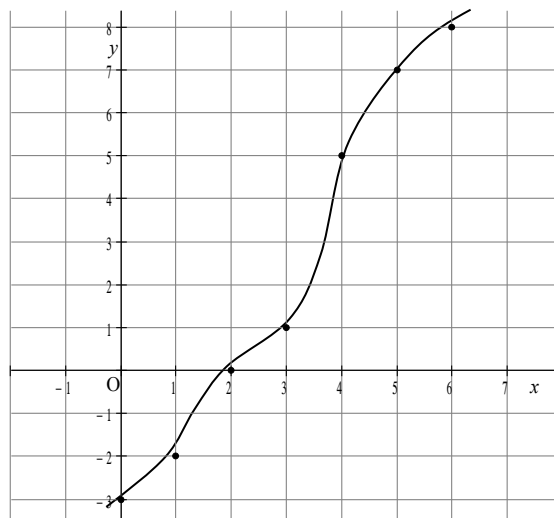


8.

- a. De grafiek gaat door  $(0,-3)$  vervolgens neemt de  $x$  met 1 toe en de  $y$ -waarde volgens het toenamediagram ook met 1 toe.  $\Rightarrow$  De grafiek gaat dus ook door  $(1,-2)$ .

b.

$x$	$y$
0	-3
1	-2
2	0
3	1
4	5
5	7
6	8

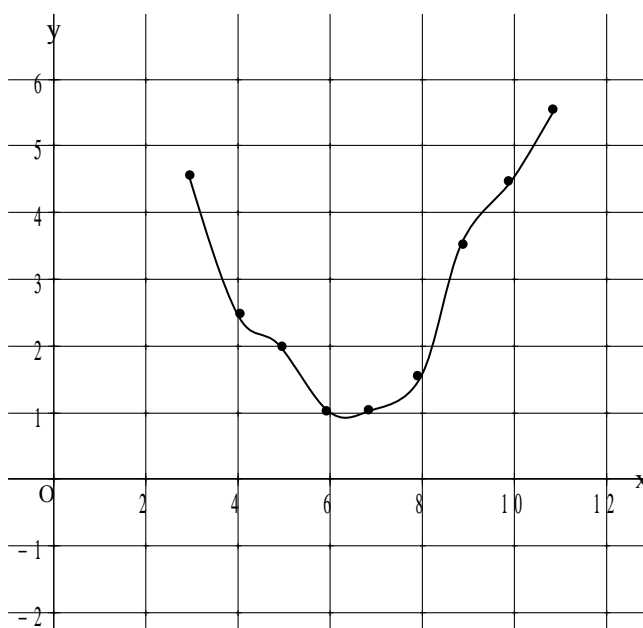


- c. Je weet alleen de coördinaten van de roosterpunten. Daar tussen in kan nog van alles.

9. Temperatuurverloop van 3.00 uur tot 11.00 uur. ; om 5.00 uur was het  $2^\circ \text{C}$ .

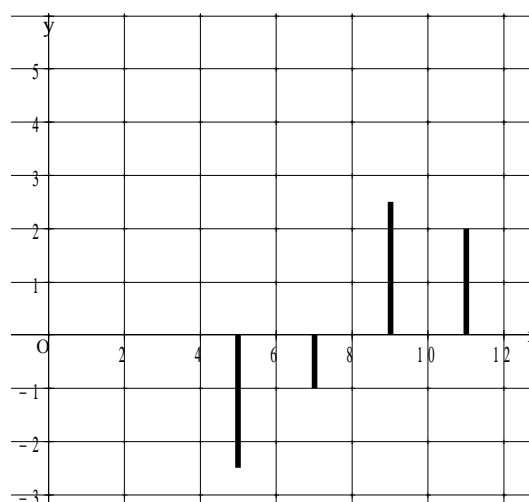
- a. We gaan aan de hand van het toenamediagram een tabel maken van de roosterpunten.

$t$	$T$
3	4,5
4	2,5
5	2
6	1
7	1
8	1,5
9	3,5
10	4,5
11	5,5



b. Toenamediagram met  $\Delta t = 2$

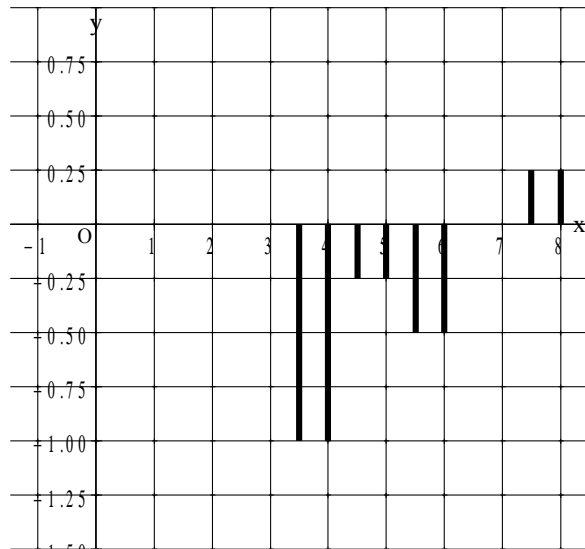
$t$	$T$	$\Delta T$
3	4,5	
5	2	-2,5
7	1	-1
9	3,5	2,5
11	5,5	2



$t$	$T$	$\Delta T$
3	4,5	
3,5	3,5	-1
4	2,5	-1
4,5	2,25	-0,25
5	2	-0,25
5,5	1,5	-0,5
6	1	-0,5
6,5	1	0
7	1	0
7,5	1,25	0,25
8	1,5	0,25

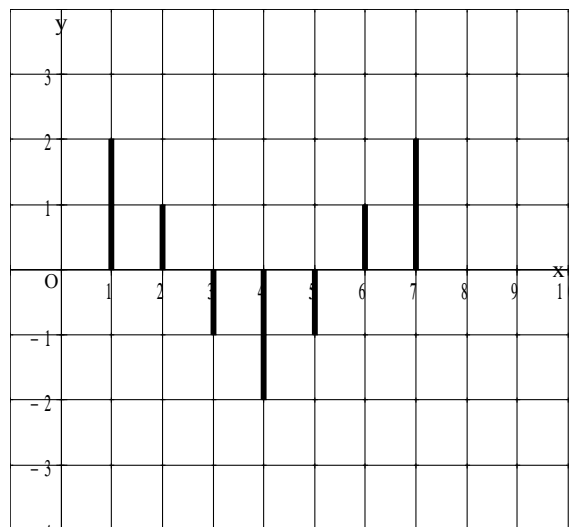
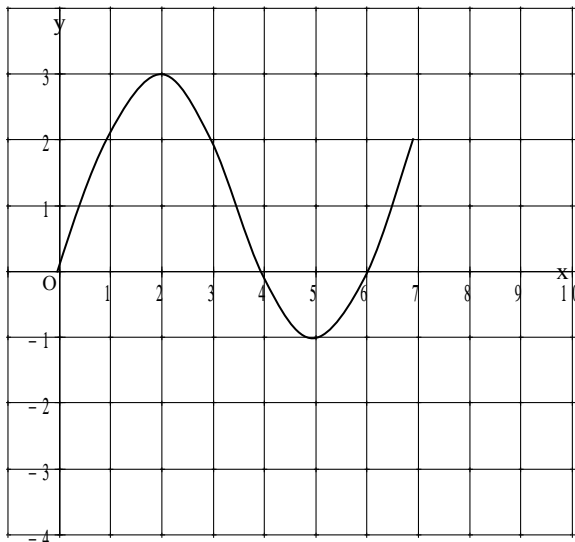
interval  $[3,8]$  met  
 $\Delta t = 0,5$

c. Nu op  
het



10. a. Hoogste punt d.w.z. de grafiek moet eerst stijgen en dan gaan dalen. Dit betekent voor het toenamediagram dat links van het hoogste punt de lijnstukjes boven de  $x$ -as zich bevinden en rechts van dat punt zijn de lijnstukjes onder de  $x$ -as. (want er is dan een daling)

b.



11. De toenamen lijken steeds kleiner. Hij had echter ook moeten kijken naar de gegeven perioden, daarvan zijn de lengten niet gelijk. Dit geeft dus een vertekend beeld.

12.

- a. Op het interval  $[2, 4]$  geldt:  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-1}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$
- b. Op het interval  $[2, 6]$  geldt:  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{6-2} = \frac{2}{4} = 0,5$
- c. Op het interval  $[-3, 0]$  geldt:  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-1}{0-(-3)} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$
- d. Dan moet het stijgen en het dalen in evenwicht zijn. Bijv. op het interval  $[3, 6]$
- e. Dan is de toename  $0,5$ . Bijv. het interval  $[2; 6,5]$ .

13.

- a. Op het interval  $[3, 5]$  geldt dan:  $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{7000-2500}{5-3} = \frac{4500}{2} = 2250$
- b. Op het interval  $[3, 5]$  geldt dan:  $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{8500-1000}{6-2} = \frac{7500}{4} = 1875$
- c. Zo tussen de 3<sup>e</sup> en de 4<sup>e</sup> dag horen de meeste mensen het gerucht voor het eerst, want dan is  $\frac{\Delta N}{\Delta t}$  het grootst.

14. Afgelegde weg  $s$  in meters en de tijd  $t$  in seconden.

- a.  $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(5)-s(0)}{5-0} = \frac{90-0}{5-0} = 18$
- b. Aangezien in 5 seconden 90 meter is afgelegd, dan kun je uit onderdeel a concluderen dat gemiddeld per seconde 18 meter is afgelegd.

15.

- a. Op het interval  $[20, 40]$ :  $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{12,5-5}{40-20} = \frac{7,5}{20} = 0,375$  km/minuut = 22,5 km/uur
- b. Op het interval  $[30, 60]$ :  $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{15-10}{60-30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$  km/minuut = 10 km/uur
- c. We gaan eerst de gemiddelde snelheid berekenen op het interval  $[0, 20]$   
 $\Rightarrow \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{5-0}{20-0} = \frac{1}{4}$  km/minuut. Net als bij opgave 15 moeten we weer de lijn doortrekken.  
 Nu moeten we echter de lijn door de punten  $(0, 0)$  en  $(20, 5)$  doortrekken. Deze lijn snijdt de grafiek weer in het punt  $(60, 15) \Rightarrow t = 60$

16. Dan wordt de afgelegde weg per tijdseenheid toch steeds kleiner. Daarom wordt de gemiddelde snelheid ook steeds kleiner.

17.  $f(x) = x^2 - 4x + 1$   $x_A = 1$  en  $x_B = 5$

a.  $y_A = f(1) = -2$  en  $y_B = f(5) = 6$

b. Het differentiequotiënt op het interval  $[1, 5]$  is :  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{6 - (-2)}{4} = 2$

18.  $f(x) = x^2 - 5x$

a. Het differentiequotiënt op het interval  $[1, 4]$  is :  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{-4 - (-4)}{3} = 0$

b. Het differentiequotiënt op het interval  $[-1, 3]$  is :  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{-6 - 6}{4} = -3$

c. Het differentiequotiënt op het interval  $[-5, 1]$  is :  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-5)}{1 - (-5)} = \frac{-4 - 50}{6} = -9$

d. Het differentiequotiënt op het interval  $[-5, 4]$  is :  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(-5)}{4 - (-5)} = \frac{-4 - 50}{9} = -6$

19.  $f(x) = x^3 - 3x + 5$

a. Zie grafiek hiernaast.

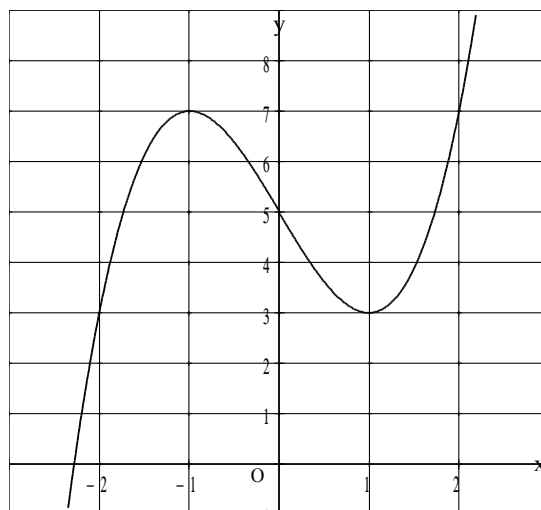
b. Op  $[1, 3]$  :  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{23 - 3}{2} = 10$

c. Op  $[-2, 4]$  :  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(-2)}{4 - (-2)} = \frac{57 - 3}{6} = 9$

d.  $x_A = -3$  en  $x_B = 1 \Rightarrow$  De punten zijn dan :  
 $A(-3, -13)$  en  $B(1, 3) \Rightarrow$  De helling van AB  
 is:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)} = \frac{3 - (-13)}{4} = 4 \Rightarrow$$

Stel :  $y = 4x + b$  De lijn gaat door  $(1, 3) \Rightarrow$   
 $3 = 4 + b \Rightarrow b = -1 \Rightarrow l: y = 4x - 1$



20.  $h = -4,9t^2 + 44,1t$  met  $h$  in meters en  $t$  in seconden.

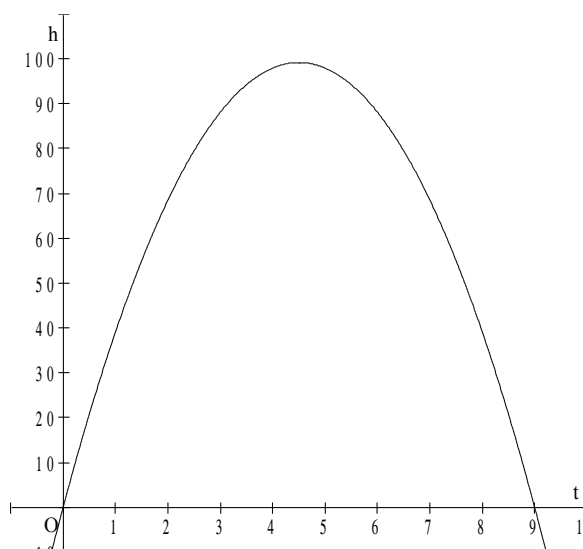
a. Zie de figuur hiernaast.

b. Hoogste punt.  $h$  invoeren in GR  $\Rightarrow$   
 $y_1 = -4,9x^2 + 44,1x$  m.b.v. de optie maximum  
 uit het calc-menu vinden we max. van 99,225  
 meter bij  $x = 4,5 \Rightarrow$  na 4,5 seconde bereikt de  
 steen het hoogste punt.

c. De derde seconde is van  $t = 2$  tot  $t = 3 \Rightarrow$   
 $h(3) = 88,2$  en  $h(2) = 68,6 \Rightarrow$  De steen legt in  
 de 3<sup>e</sup> seconde  $88,2 - 68,6 = 19,6$  m af.

d. De gemiddelde snelheid tussen  $t = 0$  en  $t = 2$  is:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \frac{68,6 - 0}{2} = 34,3 \text{ m/s}$$



- e. Nu dezelfde vraag gedurende de laatste halve seconde. Op  $t = 9$  komt de steen op de grond

⇒ De gemiddelde snelheid is:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(9) - h(8,5)}{9 - 8,5} = \frac{0 - 20,825}{0,5} = -41,65 \text{ m/s} \Rightarrow \text{de gem. snelheid is: } 41,65 \text{ m/s}$$

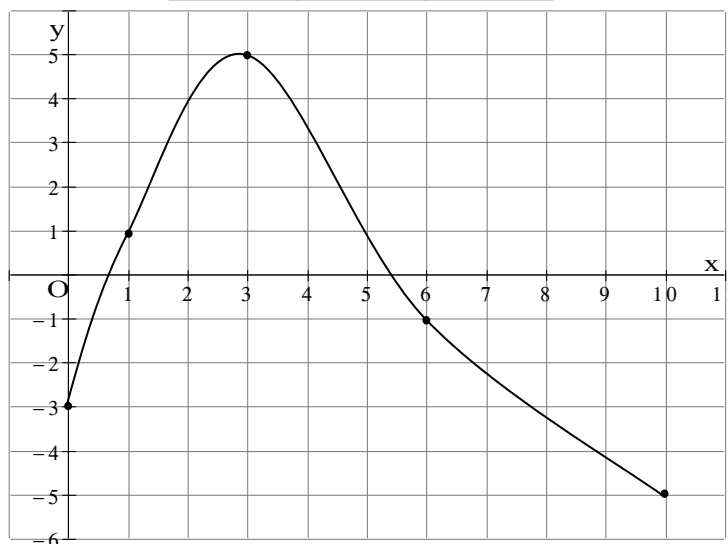
21. Domein  $[0, 10]$  en  $f(0) = -3$

interval	[0,1]	[1,3]	[3,6]	[6,10]
differentiequotiënt	4	2	-2	-1
t	4	2	-2	-1

Op het interval van 0 tot 1 is de gemiddelde stijging per hokje 4, dus van -3 gaat de  $y$ -waarde naar 1.

Op het interval van 1 naar 3 is de gemiddelde stijging 2 dus bij een toename van 2 hokjes in de  $x$ -richting is de stijging voor de  $y$ -waarde dus 4 ⇒ van 1 dus naar 5 enz.

Er zijn meerdere mogelijkheden omdat alleen de roosterpunten bekend zijn en daartussen is niks bekend.



22. We nemen de algemene lineaire functie  $y = ax + b$  en we berekenen het differentiequotiënt op het interval  $[p, q]$  ⇒

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(q) - y(p)}{q - p} = \frac{(aq + b) - (ap + b)}{q - p} = \frac{aq - ap}{q - p} = \frac{a(q - p)}{q - p} = a \Rightarrow$$

Het differentiequotiënt van de lineaire functie is gelijk aan de r.c.  $a$ .

23. Bij een gemiddelde snelheid van 60 km/uur kun je op het ene moment stilstaan voor een verkeerslicht terwijl je op het andere moment een snelheid kan hebben van 100 km per uur en dus een bekeuring kan krijgen.

24.  $s = 0,4t^2$   $s$  is de afgelegde weg in meters en  $t$  in seconden.

$$\text{Op } [3 ; 3,01] \text{ geldt: } \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3,01) - s(3)}{3,01 - 3} = \frac{0,4 \cdot 3,01^2 - 0,4 \cdot 3^2}{0,01} = \frac{3,62404 - 3,6}{0,01} = \frac{0,02404}{0,01} =$$

2,404 ⇒ De snelheid op  $t = 3$  is bij benadering 2,40 m/s

25.  $s = 8 - \frac{5}{t-2}$  met  $s$  is de afgelegde weg in meters en  $t$  in seconden.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(1,01) - s(1)}{0,01} = \frac{\left(8 - \frac{5}{1,01 + 2}\right) - \left(8 - \frac{5}{1 + 2}\right)}{0,01} = \frac{6,33887\dots - 6,333333\dots}{0,01} \approx 0,554$$

⇒

De snelheid op  $t = 1$  is bij benadering  $0,55\text{m/s}$

26. Als  $\Delta t = 0$  dan deel je door 0 en dat is niet toegestaan.

27.  $f(x) = 0,5x^2 - 2x - 2$

a.  $x_A = 3$  Voer in in GR :  $y_1 = 0,5x^2 - 2x - 2$  Nu uit het calc-menu met de optie  $\frac{dy}{dx}$  vind je :

$$\text{r.c. } k = \left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=3} = 1 \text{ Stel nu } k: y = 1x + b \text{ door } (3, f(3)) = (3; -3,5) \Rightarrow -3,5 = 3 + b \Leftrightarrow$$

$$b = -6,5 \Rightarrow \text{de vergelijking van de raaklijn wordt: } y = x - 6,5$$

b.  $x_C = 2$  uit GR :  $\left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=2} = 0 \Rightarrow$  stel  $m: y = b$  door het punt  $B(2, -4) \Rightarrow m: y = -4$

c. Snijpunt  $y$ -as  $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow C(0, -2)$  Weer uit GR:  $\left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=0} = -2 \Rightarrow l: y = -2x + b$  door  $(0, -2)$   
 $\Rightarrow -2 = 0 + b \Rightarrow b = -2 \Rightarrow$  De vergelijking is :  $y = -2x - 2$

d.  $x_D = -3$  uit GR : de helling is :  $\left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=-3} = -5$

28.  $g(x) = 3\sqrt{x+4}$

a.  $x_P = 5$  raaklijn  $k$  invoeren in GR  $y_1 = g(x)$  Nu weer uit het calc-menu de optie  $\frac{dy}{dx} \Rightarrow$   
 $\left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=5} = 0,5 \Rightarrow$  Stel de vergelijking van de raaklijn  $k$  is :  $y = 0,5x + b \Rightarrow$  door  $P(5, 9) \Rightarrow$   
 $9 = 2,5 + b \Leftrightarrow b = 6,5 \Rightarrow$  De vergelijking van lijn  $k$  is :  $y = 0,5x + 6,5$

b.  $x_Q = -3$  raaklijn  $l$  invoeren in GR  $y_1 = g(x)$  Nu weer uit het calc-menu de optie  $\frac{dy}{dx} \Rightarrow$   
 $\left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=-3} = 1,5 \Rightarrow$  Stel de vergelijking van de raaklijn  $l$  is :  $y = 1,5x + b \Rightarrow$  door  $Q(-3, 3) \Rightarrow$   
 $3 = -4,5 + b \Leftrightarrow b = 7,5 \Rightarrow$  vergelijking van lijn  $l$  is :  $y = 1,5x + 7,5$

c. Nu weer uit GR  $\Rightarrow$  De snelheid is:  $\left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=2,25} = 0,6$

d. Eerst het snijpunt  $R$  met de  $y$ -as  $\Rightarrow R(0, 6)$  dan  $\left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=0} = 0,75 \Rightarrow$  stel  $m: y = 0,75x + b$  door  
 $R(0, 6) \Rightarrow b = 6 \Rightarrow$  De vergelijking van lijn  $m$  is:  $y = 0,75x + 6$

29.  $f(x) = -x^2 - 2x + 8$

a.  $x_A = -2$  Eerst weer  $y_1 = f(x)$  invoeren in GR . Optie  $\frac{dy}{dx}$  uit het calc-menu  $\Rightarrow \left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=-2} = 2$

b. Snijpunt  $y$ -as  $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow B(0, 8) \Rightarrow \left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=0} = -2 \Rightarrow$

stel  $l$  is:  $y = -2x + b$  door  $B(0,8) \Rightarrow$   
 $b = 8 \Rightarrow l$  is :  $y = -2x + 8$

c. Even een schets van de situatie:

We zien dat we eerst de snijpunten P en Q met de  $x$ -as nodig hebben. Vervolgens de bijbehorende raaklijnen en tenslotte gaan we deze raaklijnen  $m$  en  $n$  snijden met elkaar.  $\Rightarrow$  snijpunt S.

M.b.v. de optie zero uit het calc-menu vinden we de punten P en Q  $\Rightarrow P(-4, 0)$  en  $Q(2, 0)$

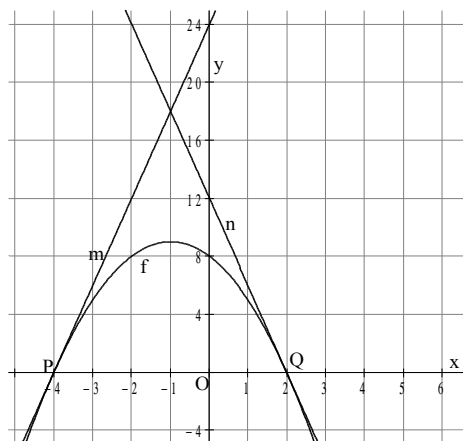
Dan  $\left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=-4} = 6 \Rightarrow$  stel  $m : y = 6x + b$  door  $P(-4,0)$

$\Rightarrow 0 = -24 + b \Rightarrow b = 24 \Rightarrow$

$m : y = 6x + 24$

Dan  $\left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=2} = -6 \Rightarrow$  stel  $n : y = -6x + b$  door  $Q(2,0) \Rightarrow 0 = -12 + b \Leftrightarrow b = 12$

$\Rightarrow y = -6x + 12$  Nu lijnen  $m$  en  $n$  snijden  $\Rightarrow 6x + 24 = -6x + 12 \Leftrightarrow 12x = -12 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow$   
 $y_S = -6 + 24 = 18 \Rightarrow S(-1, 18)$



d.  $x_R = -3$  en  $x_T = 3 \Rightarrow$  De bijbehorende punten zijn dan na invulling in de functie  $f$ :

$R(-3, 5)$  en  $T(3, -7) \Rightarrow$  r.c. van lijn RT is:  $\frac{y_T - y_R}{x_T - x_R} = \frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)} = \frac{-7 - 5}{6} = -2$

30.  $s = 0,6t^2$  met  $s$  is de afgelegde weg in meters en  $t$  in seconden.

a. Invoeren in GR :  $y_1 = 0,6x^2$  Nu uit het calc-menu de optie  $\frac{dy}{dx} \Rightarrow$  de snelheid op  $t = 3$  is:

$\left[ \frac{ds}{dt} \right]_{t=3} = 3,6 \text{ m/s}$  en op  $t = 5$  :  $\left[ \frac{ds}{dt} \right]_{t=5} = 6 \text{ m/s}$

b. Snelheid verandert niet na  $t = 5 \Rightarrow$  Na iedere seconde is 5 meter afgelegd  $\Rightarrow$  Na 10 seconden is in totaal afgelegd :  $s(5) + 5 \cdot 6 = 0,6 \cdot 25 + 30 = 45$  meter

31.  $f(x) = -x^2 + 4x$

a. Grafiek stijgend op  $\langle \leftarrow, 2 \rangle \Rightarrow$  positieve helling

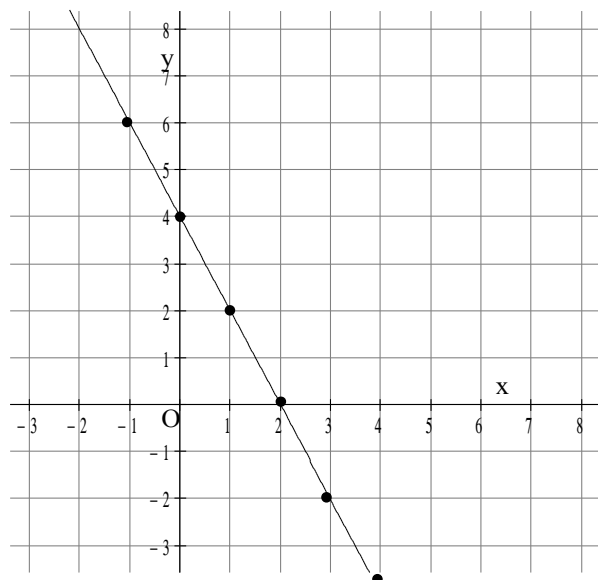
Dalende grafiek op  $\langle 2, \rightarrow \rangle \Rightarrow$  negatieve helling

b. In de top T is de helling 0

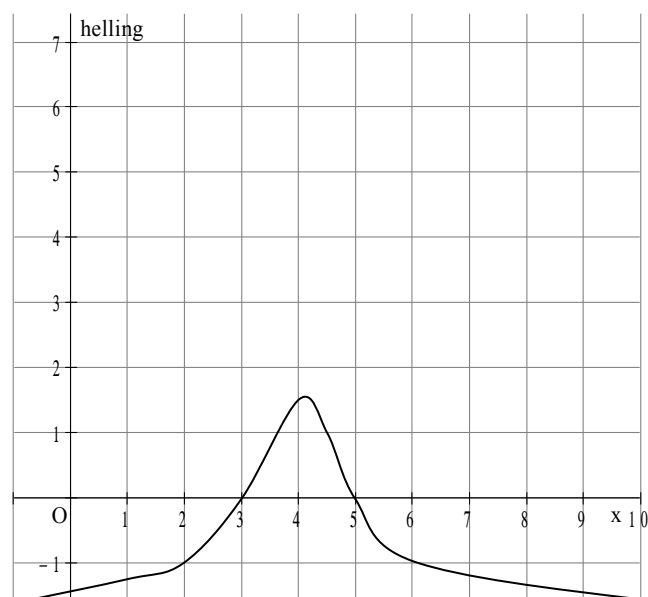
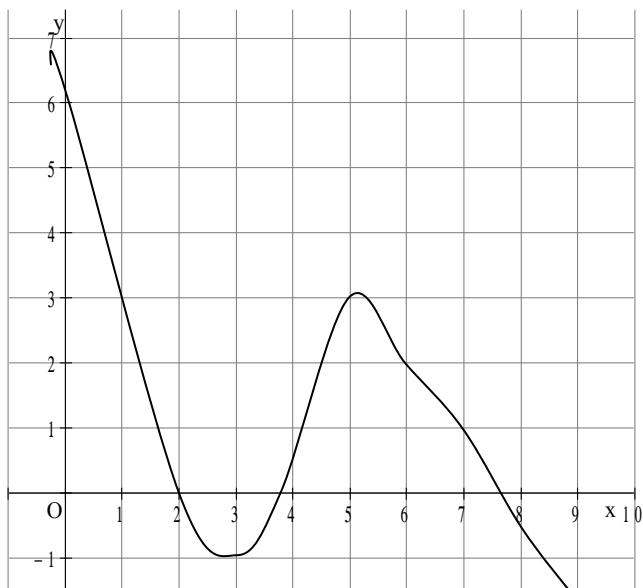
c. Voer in  $y_1 = -x^2 + 4x$  en gebruik de tabel en de optie  $\frac{dy}{dx}$  uit het calc-menu.  $\Rightarrow$

$x$ coördinaat punt	-1	0	1	2	3	4
helling in punt	6	4	2	0	-2	-4

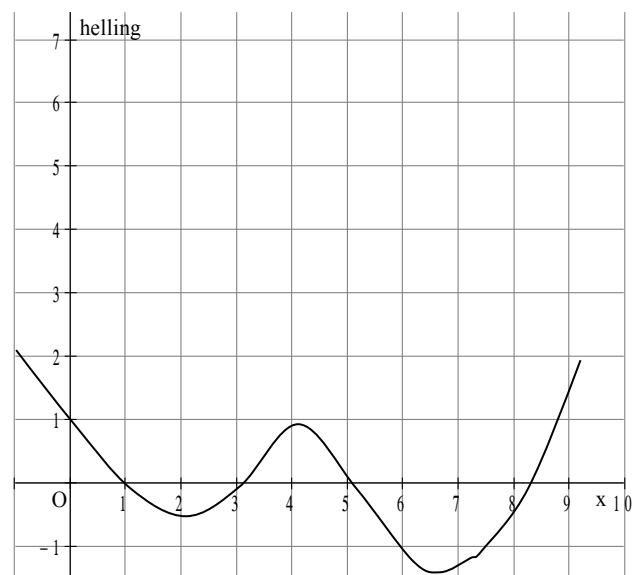
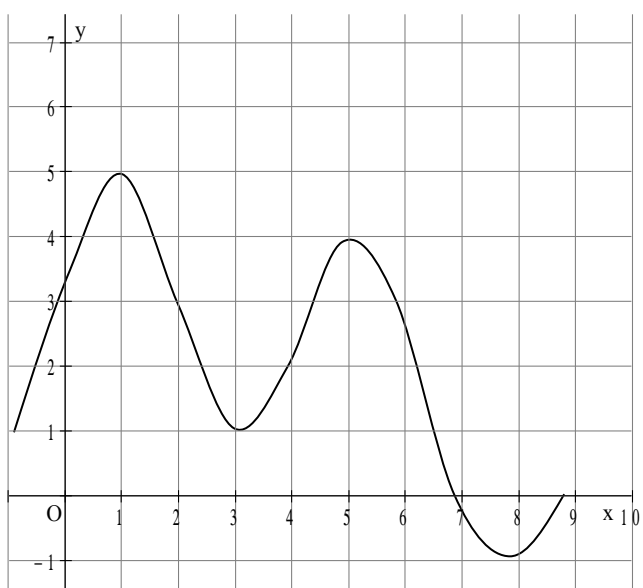
- d. De  $y$ -waarden van deze lijn zijn de hellingen van de  $x$ -coördinaten van de punten in de oorspronkelijke grafiek.



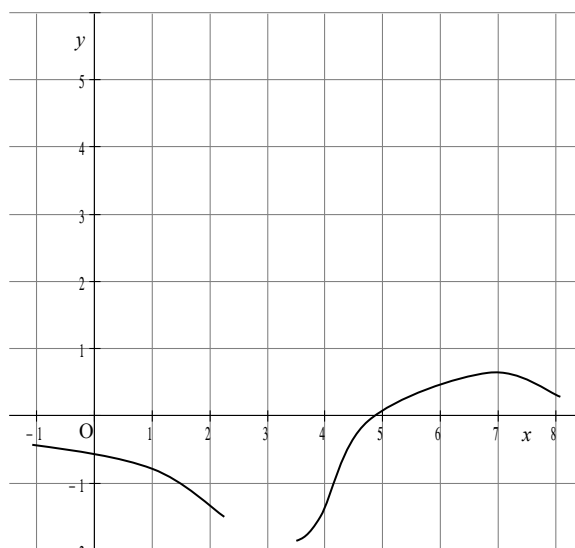
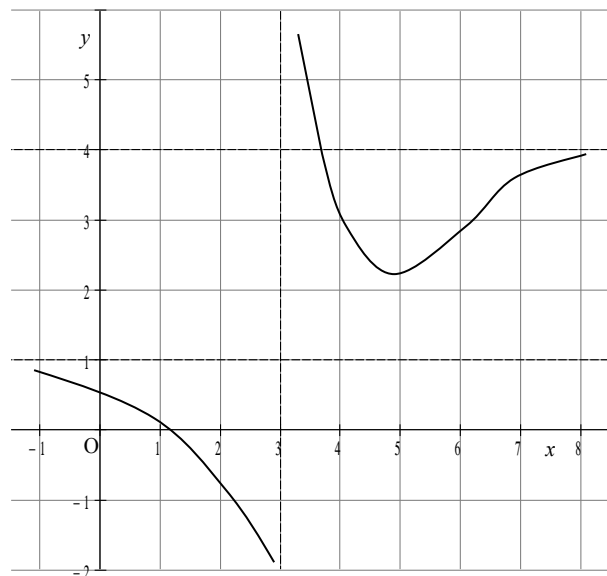
34. eerste figuur



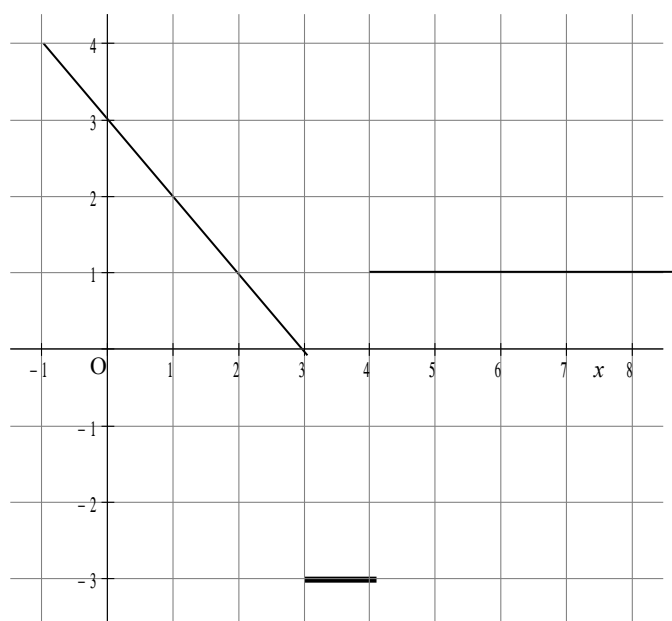
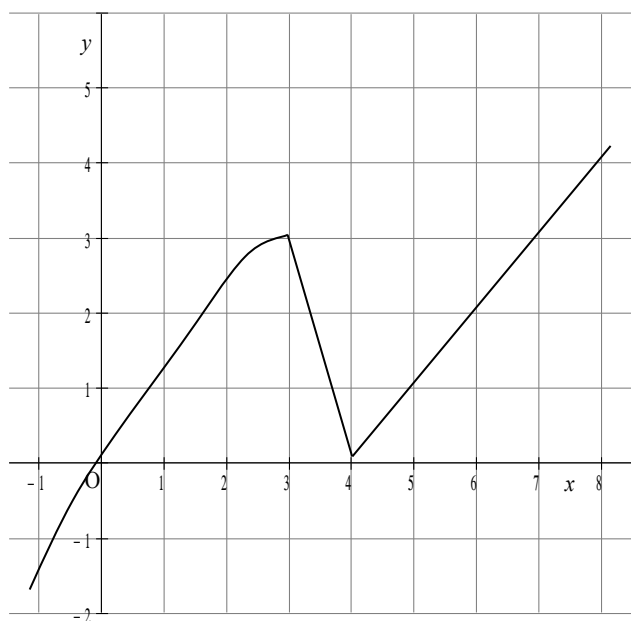
tweede figuur:



Derde figuur



Vierde figuur:



33.

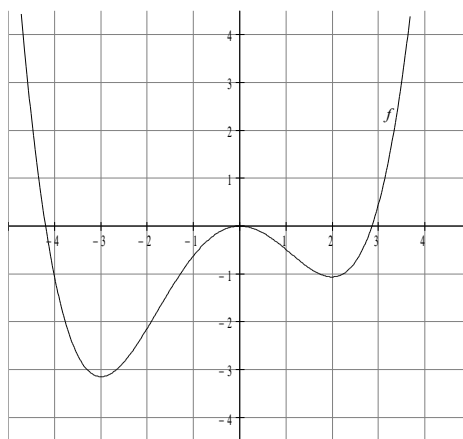
- De grafiek is toenemend stijgend op  $\langle a, b \rangle \Rightarrow$  hellingfunctie is positief en neemt daar toe
- Grafiek is afnemend dalend op  $\langle c, d \rangle \Rightarrow$  de hellingfunctie is negatief en stijgt.
- Grafiek heeft een hoogste punt voor  $x = p \Rightarrow$  de hellingfunctie snijdt de  $x$ -as in  $(p, 0)$  en gaat van een positieve waarde naar een negatieve waarde.
- Grafiek in  $x = q$  van toenemend dalend naar afnemend dalend  $\Rightarrow$  de hellingfunctie heeft in  $x = q$  een minimum.

34.

a.

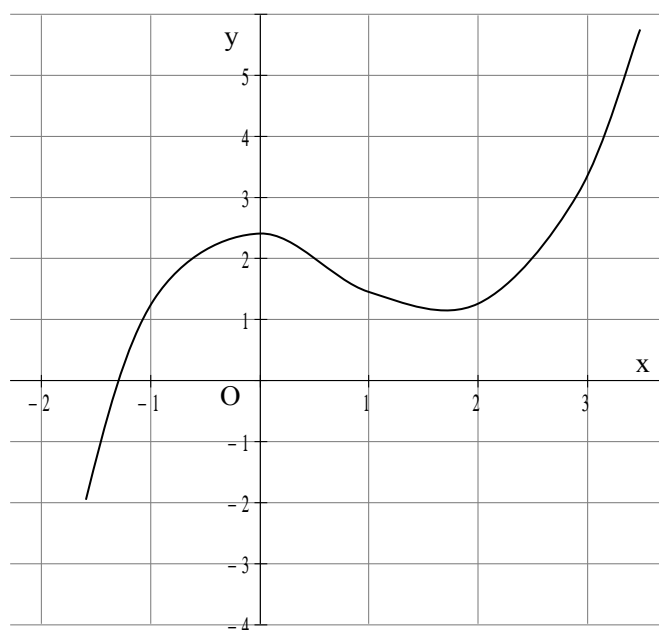
	Hellinggrafiek van $f$	Grafiek van $f$
$\langle -4, -3 \rangle$	Onder de $x$ -as	Dalend
$x = -3$	Snijdt de $x$ -as	Top
$\langle -3, 0 \rangle$	Boven de $x$ -as	stijgend
$x = 0$	Snijdt de $x$ -as	Top
$\langle 0, 2 \rangle$	Onder de $x$ -as	dalend
$x = 2$	Snijdt de $x$ -as	top
$\langle 2, 4 \rangle$	Boven de $x$ -as	stijgend

b.



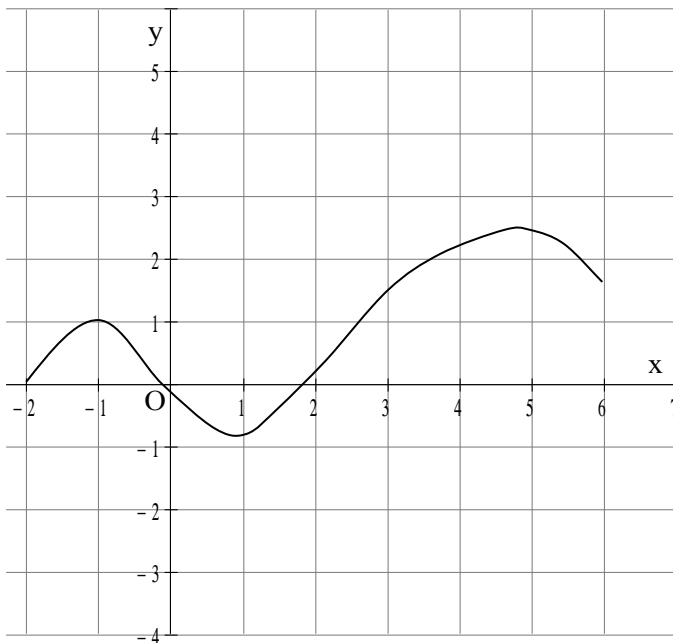
35 a. Uit de gegeven hellinggrafiek lezen we af de waarde van de helling van de oorspronkelijke grafiek.

$x$	-1,5	-1	0	1	2	3	3,5
$\frac{dy}{dx}$	5	3	0	-1	0	3	5



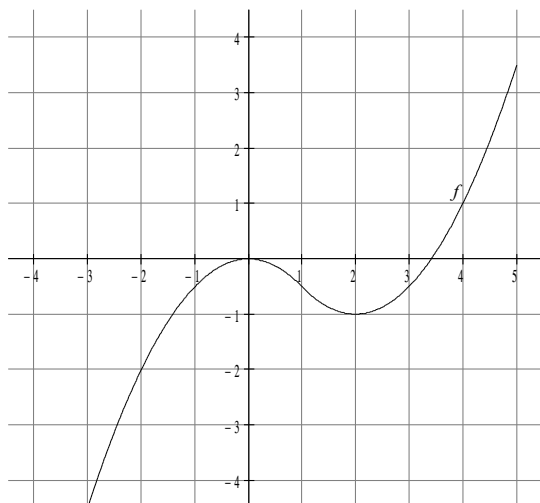
35b.

$x$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{dy}{dx}$	5	0	-1	0	1,5	0	1,5	0	-2



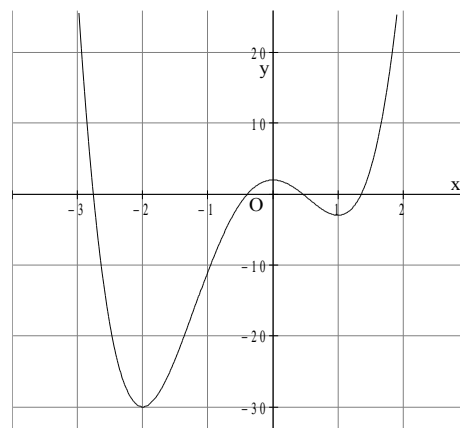
35c.

$x$	-2	-1	0	1	2	3	4
$\frac{dy}{dx}$	2	1	0	-1	0	1	2



36.  $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$

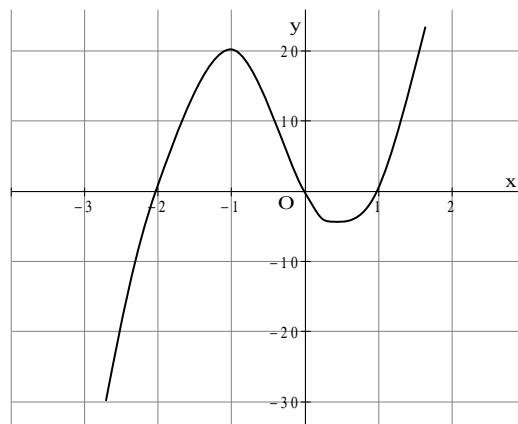
- a. invoeren  $y_1 = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$   
 met window  $[-3, 2] \times [-40, 20]$   
 Via het calc-menu en de opties maximum en minimum  
 vinden we de toppen:



$(-2, -30)$  en  $(0, 2)$  en  $(1, -3)$

- b. Nu zogoed mogelijk de hellingen aflezen uit de grafiek. We moeten in de gaten houden dat 1 hokje naar rechts en 1 hokje omhoog betekent dat de helling daar 10 is. We krijgen nu zo'n beetje het volgende:

Zie de figuur rechts voor de schets van de hellingfunctie.



- c.  $(-1, a)$  op de hellinggrafiek  $\Rightarrow$  In de hellinggrafiek lijkt  $a = 20$ . Dit is een benadering. Met de GR vinden we met de optie  $\frac{dy}{dx}$  uit het calc-menu de waarde 24.

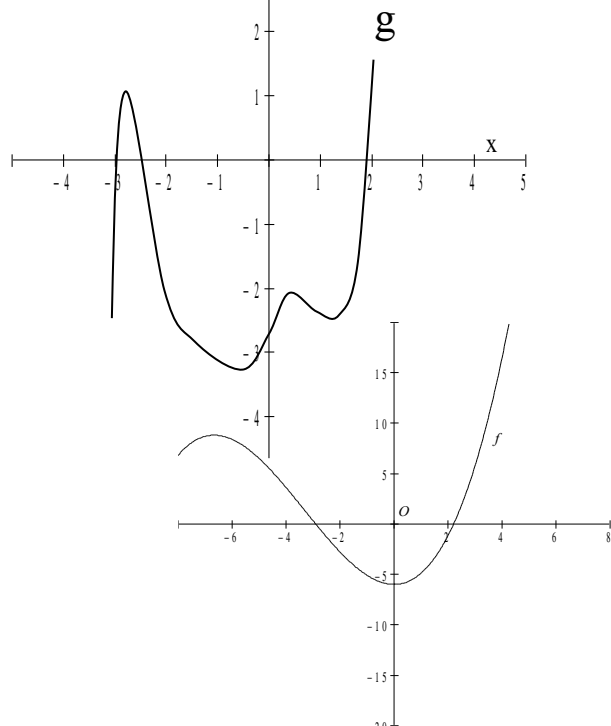
Dus  $a = 24$

- d.  $f$  is al ingevoerd. Met de optie zero vinden we de snijpunten :  $(-2,8 ; 0)$  ;  $(-0,4 ; 0)$  ;  $(0,5 ; 0)$  en  $(1,4 ; 0)$

- e. De grafiek van  $f$  is de hellingfunctie van een functie  $g$ .  
Eerst kijken naar  $f$ :  $\Rightarrow$

$x$	-2,75	-2	-0,5	0	0,5	1,5	2
$\frac{dy}{dx}$	0	-30	0	2	0	0	34

$X$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\frac{dy}{dx}$	-50	0	20	0	0	50	

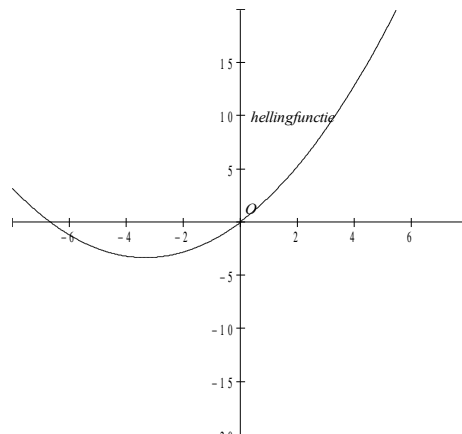


37.  $f(x) = 0,1x^3 + x^2 - 6$

- a. Voer in :  $y_1 = f(x)$  Een schets van  $f$  geeft.  
Afleren van de hellingen geeft :

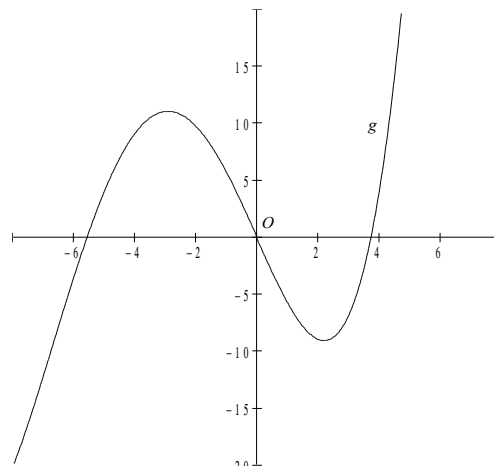
$x$	-5	-3	0	1	2	3
$\frac{dy}{dx}$	-2,5	-3,3	0	2,3	5,2	8,7

De schets van de hellingfunctie wordt nu :



- b. Nu is de grafiek van  $f$  de hellingfunctie van een grafiek van  $g$ .  
De functiewaarden van  $f$  zijn nu dus hellingen van de grafiek van  $g$ .

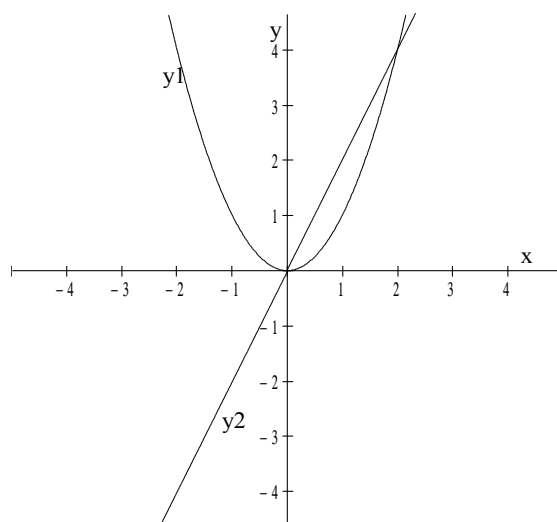
De figuur rechts is een mogelijke grafiek van  $g$ .



38.

$$f(x) = x^2$$

- a. Voer in:  $y_1 = x^2$   
 $y_2 = \text{nDeriv}(y_1, x, x)$
- b. De lijn gaat o.a. door (0,0)  
(-1, -2) en door (2,4)  $\Rightarrow$   
Bij  $y = ax$  geldt:  $a = 2 \Rightarrow y = 2x$

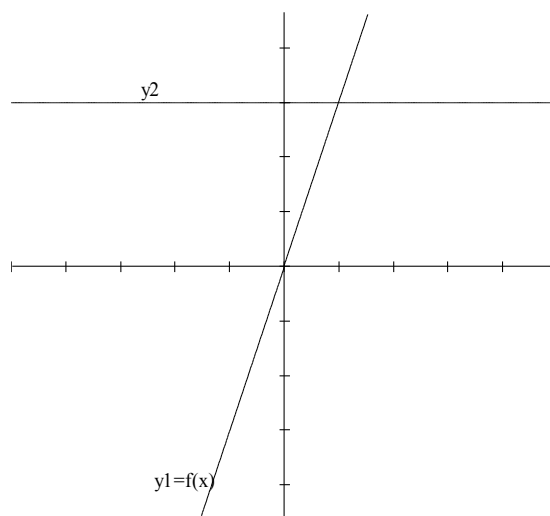


39.  $f(x) = 3x$  en  $g(x) = 4$

a.  $y_1 = f(x) = 3x$   
 $y_2 = \text{nDeriv}(y_1, x, x)$

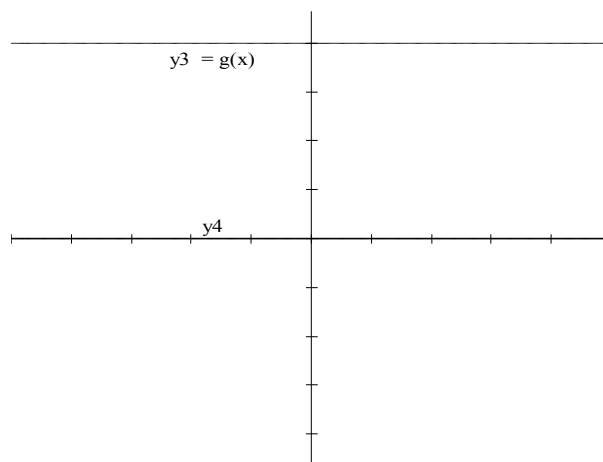
- b. De helling van de lijn  $y = 3x$  is in ieder punt gelijk aan 3 dus is de hellingfunctie gelijk aan  $y = 3$

De vergelijking van de hellingfunctie is :  
 $y = 3$



c.  $y_3 = 4$   
 $y_4 = \text{nDeriv}(y_3, x, x)$

- d. De formule voor de hellingfunctie van  $g$  is:  
 $y = 0$



40. Als je  $h = 0$  eerder invult dan is de noemer nul en dat is niet toegestaan.

41.  $f(x) = 1,5x^2$

a.  $f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1,5(4+h)^2 - 1,5 \cdot 4^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1,5(16 + 8h + h^2) - 24}{h} =$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1,5(16 + 8h + h^2) - 24}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{24 + 12h + 1,5h^2 - 24}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h + 1,5h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (12 + 1,5h) = 12$$

b.  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1,5(x+h)^2 - 1,5 \cdot x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1,5(x^2 + 2xh + h^2) - 1,5x^2}{h} =$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1,5x^2 + 3xh + 1,5h^2 - 1,5x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3xh + 1,5h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x + 1,5h) = 3x$$

42.  $f(x) = x^2 - 4x$

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 4(3+h) - (3^2 - 4 \cdot 3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 12 - 4h - (-3)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2) = 2 \end{aligned}$$

b.  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 4(x+h) - (x^2 - 4x)}{h} =$   

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h - x^2 + 4x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h - 4) = 2x - 4$$

43.

a.  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) - ax}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax + ah - ax}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} = a$

b.  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a - a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$

44.

a.  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h)^3 - ax^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - ax^3}{h} =$   

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax^3 + 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3 - ax^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3ax^2h + 3axh^2 + ah^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3ax^2 + 3axh + ah^2) = 3ax^2$$

b.  $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{(a(x+h)^2 + b(x+h) + c) - (ax^2 + bx + c)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{(a(x^2 + 2xh + h^2) + bx + bh + c) - (ax^2 + bx + c)}{h} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{(ax^2 + 2axh + ah^2 + bx + bh + c - ax^2 - bx - c)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{2axh + ah^2 + bh}{h} = \lim_{h \rightarrow \infty} (2ax + ah + b) = 2ax + b \end{aligned}$$

45.

a.  $f(x) = c \cdot g(x)$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{c \cdot g(x+h) - c \cdot g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{c \cdot (g(x+h) - g(x))}{h} =$$

$$= c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = c \cdot g'(x)$$

b.  $s(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow s'(x) =$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

46.

a.  $f(x) = 5x^6 - 3x^5 + 2x - 7 \Rightarrow f'(x) = 30x^5 - 15x^4 + 2$

b.  $g(x) = -2x^8 - 4x^4 + 7,2 \Rightarrow g'(x) = -16x^7 - 16x^3$

c.  $h(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - 1 \Rightarrow h'(x) = -x^2 - x - 1$

d.  $k(q) = 1 + 3q - 3q^2 - 5q^7 \Rightarrow k'(q) = 3 - 6q - 35q^6$

47.

a.  $f(x) = (5x + 7)(4 - 3x) = 20x - 15x^2 + 28 - 21x = -15x^2 - x + 28 \Rightarrow f'(x) = -30x - 1$

b.  $g(x) = (3x + 6)^2 - 8x = 9x^2 + 36x + 36 - 8x = 9x^2 + 28x + 36 \Rightarrow g'(x) = 18x + 28$

c.  $h(x) = 5(x - 3)^2 + 5(2x - 1) = 5(x^2 - 6x + 9) + 10x - 5 = 5x^2 - 30x + 45 + 10x - 5 = 5x^2 - 20x + 40 \Rightarrow h'(x) = 10x - 20.$

d.  $k(x) = -3(x - 1)(5 - 9x) - 8(x - 7) = -3(5x - 9x^2 - 5 + 9x) - 8x + 56 = -15x + 27x^2 + 15 - 27x - 8x + 56 = 27x^2 - 50x + 71 \Rightarrow k'(x) = 54x - 50.$

48.

a.  $f(x) = (3x - 1)(x^2 + 5x) = 3x^3 + 15x^2 - x^2 - 5x = 3x^3 + 14x^2 - 5x \Rightarrow f'(x) = 9x^2 + 28x - 5$

b.  $g(x) = (3x^3 - 1)^2 = 9x^6 - 6x^3 + 1 \Rightarrow g'(x) = 54x^5 - 18x^2$

c.  $h(x) = (5x^5 - 3)(3x - 2) = 15x^6 - 10x^5 - 9x - 6 \Rightarrow h'(x) = 90x^5 - 50x^4 - 9$

d.  $k(x) = 5 - 3(x^4 - x)(x + 1) = 5 - 3(x^5 + x^4 - x^2 - x) = 5 - 3x^5 - 3x^4 + 3x^2 + 3x = -3x^5 - 3x^4 + 3x^2 + 3x + 5 \Rightarrow k'(x) = -15x^4 - 12x^3 + 6x + 3$

e.  $l(t) = (5t^3 - t)(3t^5 + t) = 15t^8 + 5t^4 - 3t^6 - t^2 \Rightarrow l'(t) = 120t^7 + 20t^3 - 18t^5 - 2t$

f.  $m(q) = 1 - (3q^2 - 2)^2 = 1 - (9q^4 - 12q^2 + 4) = -9q^4 + 12q^2 - 3 \Rightarrow m'(q) = -36q^3 + 24q$

49. Gegeven  $f(x) = x^2 - 3x - 1$  en punt A met  $x_A = 4$

a.  $f'(x) = 2x - 3$ ;  $f'(4) = 2 \cdot 4 - 3 = 5$  en  $f(4) = 16 - 12 - 1 = 3$

b.  $y_A$  is de functiewaarde bij het punt A  $\Rightarrow$  we moeten  $f(4)$  hebben.

c. Nu de helling in A  $\Rightarrow f'(4)$  moet Bastiaan hebben.

50.  $f(x) = 0,5x^3 - 2x^2 + 2$

a. Punt A met  $x_A = 4$  Raaklijn  $\Rightarrow f'(x) = 1,5x^2 - 4x$  Stel de vergelijking van k is :  $y = ax + b$   
 $\Rightarrow a = f'(4) = 24 - 16 = 8 \Rightarrow y = 8x + b$  door het raakpunt A(4,  $f(4)$ ) = (4, 2)  $\Rightarrow$   
 $2 = 32 + b \Rightarrow b = -30 \Rightarrow$  De vergelijking van k is :  $y = 8x - 30$

b. Punt B met  $x_B = -2$  Stel m:  $y = ax + b \Rightarrow a = f'(-2) = 14 \Rightarrow y = 14x + b$  door het punt B(-2, -10)  $\Rightarrow -10 = 14 \cdot (-2) + b \Rightarrow b = 18 \Rightarrow$  verg. m is:  $y = 14x + 18$

51. Gegeven  $f(x) = 2x^2 - 6x$

a. Punt A met  $x_A = -3 \Rightarrow$  raakpunt A(-3, 36) Stel de vergelijking van  $l$  is:  $y = ax + b$   
 $f'(x) = 4x - 6 \Rightarrow a = f'(-3) = -18 \Rightarrow y = -18x + b$  door het punt A  $\Rightarrow 36 = -18 \cdot (-3) + b$   
 $\Rightarrow b = 36 - 54 = -18 \Rightarrow$  de verg. van lijn  $l$  is:  $y = -18x - 18$

b. We gaan eerst de snijpunten met de  $x$ -as berekenen  $\Rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow$   
 $x = 0 \vee x = 3 \Rightarrow P(3, 0)$  Raaklijn  $n$  in P  $\Rightarrow f'(3) = 6$  Stel  $y = ax + b \Rightarrow a = f'(3) = 6 \Rightarrow$   
 $y = 6x + b$  door P(3, 0)  $\Rightarrow 0 = 6 \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = -18 \Rightarrow n : y = 6x - 18$

52. Gegeven  $f(x) = (x^2 - 4)(x + 1)$

a.  $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$   
 Punt A met  $x_A = -3 \Rightarrow A(-3, -10)$  Stel  $k : y = ax + b$   $a = f'(-3) = 17 \Rightarrow y = 17x + b \Rightarrow$   
 door het punt A  $\Rightarrow -10 = 17 \cdot (-3) + b \Rightarrow b = 41 \Rightarrow k : y = 17x + 41$

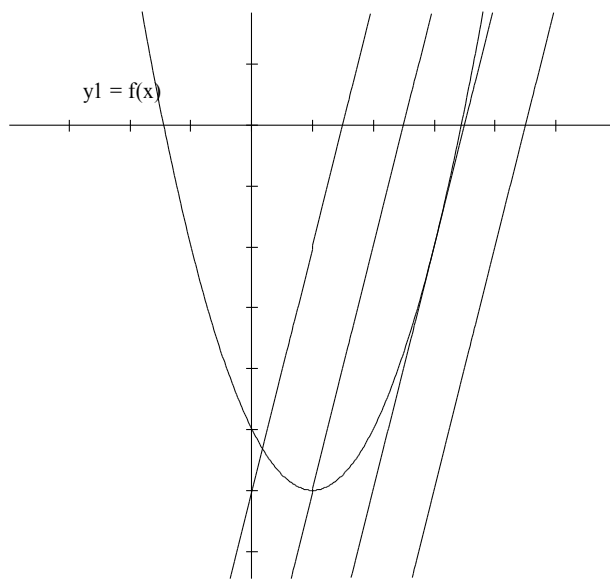
b.  $f$  snijden met de  $y$ -as  $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow B(0, -4)$  Nu de raaklijn  $l$  in B. Stel de vergelijking van  $l$   
 is :  $y = ax + b$   $a = f'(0) = -4 \Rightarrow y = -4x + b$  door B  $\Rightarrow -4 = 0 + b \Rightarrow b = -4 \Rightarrow$  de  
 vergelijking van  $l$  is :  $y = -4x - 4$

c.  $f$  snijden met de  $x$ -as  $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow$   
 $(x^2 - 4)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \vee x = -1 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2 \vee x = -1 \Rightarrow$   
 Punt C is dus: (2, 0) Stel de vergelijking van lijn  $m$  is:  $y = ax + b \Rightarrow$   
 $a = f'(2) = 12 \Rightarrow y = 12x + b$  door C(2, 0)  $\Rightarrow 0 = 24 + b \Leftrightarrow b = -24 \Rightarrow m : y = 12x - 24$

53. Gegeven:  $f(x) = x^2 - 2x - 5$  en  $y = 4x - 6$  ;  
 $y = 4x - 10$  ;  $y = 4x - 14$  en  $y = 4x - 18$   
 lijn  $y = 4x - 14$  raakt de grafiek van  $y = f(x)$

a. Zie de figuur .

b. De lijn  $y = 4x - 14$  raakt de grafiek van  
 $y = f(x)$ .



- c. De coördinaten van het raakpunt vinden we door de vergelijking :  $x^2 - 2x - 5 = 4x - 14 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow$   
 Het raakpunt wordt dus :  $R(3, -2)$   
 De lijn  $y = 4x - 14$  raakt de grafiek van  $f \Rightarrow$  de r.c. van de raaklijn is dus  $4 \Rightarrow f'(x_R) = 4$

54.  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

- a. r.c. =  $4 \Rightarrow f'(x) = 4 \Leftrightarrow -2x + 2 = 4 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow A(-1, 0)$
- b. Raaklijn  $k$  is evenwijdig met de lijn  $l : y = -6x + 8 \Rightarrow$   
 r.c.  $l =$  r.c.  $k \Rightarrow -2x + 2 = -6 \Leftrightarrow -2x = -8 \square x = 4 \Rightarrow B(4, -16 + 8 + 3) = (4, -5)$

55. Gegeven  $f(x) = 0,5x^3 - 3x - 2$

- a. R.c. van de raaklijn is  $3 \Rightarrow f'(x) = 3 \Leftrightarrow 1,5x^2 - 3 = 3 \Leftrightarrow 1,5x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2 \Rightarrow$  De gevraagde punten zijn dus:  $(2, -4)$  en  $(-2, 0)$ .
- b. De raaklijn in de toppen van de gegeven functie is horizontaal, daarom is de r.c. van de raaklijn in die toppen gelijk aan nul.  
 $f'(x) = 1,5x^2 - 3$  Voor de r.c. in de toppen geldt :  $f'(x) = 0 \square 1,5x^2 - 3 = 0 \square 1,5x^2 = 3 \square x^2 = 2 \square x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \Rightarrow$  De  $x$ -coördinaten van A en B zijn dus  $-\sqrt{2}$  en  $\sqrt{2}$ .

56. Gegeven  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1$

- a.  $P$  met  $x_P = 4 \Rightarrow$  raakpunt  $P(4, f(4)) = (4, 4\frac{1}{3})$   $f'(x) = x^2 - 2x$  Stel  $k : y = ax + b \Rightarrow a = f'(4) = 16 - 8 = 8 \Rightarrow y = 8x + b$  door  $(4, 4\frac{1}{3}) \Rightarrow 4\frac{1}{3} = 8 \cdot 4 + b \Leftrightarrow b = -27\frac{2}{3} \Rightarrow$  de vergelijking van lijn  $k$  wordt:  $y = 8x - 27\frac{2}{3}$
- b. Nu geldt dat de raaklijn evenwijdig is met de lijn  $l : y = 3x + 6 \Rightarrow f'(x) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1 \Rightarrow$  de bijbehorende raakpunten Q en R zijn dan :  $Q(-1, -2\frac{1}{3})$  en  $R(3, -1)$
- c. Toppen  $\Rightarrow$  r.c. van de raaklijnen in de toppen is  $0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \Rightarrow$  De toppen zijn :  $(0, -1)$  en  $(2, -2\frac{1}{3})$ .
- d.  $f$  snijden met de  $x$ -as.  $\Rightarrow$  invoeren in GR  $y_1 = f(x)$  Nu m.b.v. de optie zero uit het calc-menu vinden we  $x \approx 3,279 \Rightarrow A(3,279 ; 0)$  Vervolgens vinden we m.b.v. de optie  $\frac{dy}{dx}$  uit het calc-menu r.c. raaklijn in  $A$  is :  $4,194$   
 Nu moet gelden dat deze r.c. gelijk is aan de r.c. van de raaklijn in punt  $B$ . We moeten dus de vergelijking oplossen :  $f'(x) = 4,194 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 4,194$   
 Nu invoeren in GR  $y_2 = x^2 - 2x$  en  $y_3 = 4,194$  Nu m.b.v. de optie intersect uit het calc-menu vinden we:  $x \approx -1,279 \Rightarrow f(-1,279) \approx -3,33$  dus punt  $B(-1,28 ; -3,33)$ .

57.  $s = 0,8.t^2$

- a.  $v = s'(t) = 1,6t \Rightarrow v(3) = 1,6 \cdot 3 = 4,8 \text{ m/s}$   
 $v(6) = 1,6 \cdot 6 = 9,6 \text{ m/s}$
- b.  $30 \text{ km/uur} = \frac{30 \cdot 1000}{3600} \approx 8,33 \text{ m/s}$  Nu geldt:  $8,33 = 1,6t \Leftrightarrow t \approx 5,21$  Dus na 5,21 seconden.
- c. Afgelegde weg na 5 seconden is  $s(5) = 0,8 \cdot 25 = 20 \text{ m}$
- d. Eerst na 6 seconden bereken  $\Rightarrow s(6) = 0,8 \cdot 36 = 28,8 \text{ m}$   
 Na 6 seconden blijft zijn snelheid constant  $\Rightarrow v(6) = 9,6 \text{ m/s} \Rightarrow$  De afgelegde weg na 10 seconden is dus:  $28,8 + 4 \cdot 9,6 = 28,8 + 38,4 = 67,2 \text{ m}$

58. Gegeven  $h = -5t^2 + 25t$

- a.  $v(t) = h'(t) = -10t + 25 \Rightarrow$  De snelheid die Frits geeft is:  $v(0) = 0 + 25 = 25 \text{ m/s}$
- b.  $v(3) = -30 + 25 = -5 \text{ m/s}$  ( dus 5 m/s omlaag)
- c. Hoogste punt  $\Rightarrow$  de snelheid is dan 0  $\Rightarrow v = 0 \Leftrightarrow -10t + 25 = 0 \Leftrightarrow t = 2,5$  seconden
- e. Grond  $\Rightarrow h = 0 \Rightarrow -5t^2 + 25t = 0 \Leftrightarrow -5t(t - 5) = 0 \Leftrightarrow t = 0$  (begin)  $\vee t = 5 \Rightarrow$   
 Hij komt weer op de grond na 5 seconden.  
 De snelheid op  $t=5$  is dan:  $v(5) = -50 + 25 = -25 \text{ m/s} \Rightarrow$  De bal komt met een neerwaartse snelheid van 25 m/s weer op de grond.