

## Uitwerkingen H2 Functies en grafieken

1. Gegeven  $k : y = 2x + 3$   
2 geeft de r.c. van de lijn aan en 3 geeft de hoogte van de lijn aan op de  $y$ -as.
  
2.  $l$  door  $(0, 2)$  en de r.c. van  $l$  is  $-0,5$  (2 hokjes naar rechts en 1 hokje omlaag)  $\Rightarrow$   
De vergelijking van  $l$  is nu  $y = -0,5x + 2$
  
- 3.a. Lijn  $l$  heeft r.c.  $-2 \Rightarrow$  stel  $l: y = -2x + b$   $l$  door  $(-2, 3) \Rightarrow 3 = -2 \cdot (-2) + b \Rightarrow b = -1 \Rightarrow$   
 $y = -2x - 1$
  
- b.  $m$  heeft r.c.  $4 \Rightarrow$  r.c. van lijn  $k$  is dus ook  $4 \Rightarrow$  stel  $k: y = 4x + b$  Lijn  $k$  door  $(-5, 21) \Rightarrow$   
 $21 = 4 \cdot (-5) + b \Rightarrow b = 41 \Rightarrow y = 4x + 41$  is de vergelijking van lijn  $k$ .
  
4.  $q: y = -\frac{1}{3}x$  en punt  $C(-18, 30)$
  
- a. lijn  $p \parallel q \Rightarrow$  r.c. lijn  $p = -\frac{1}{3} \Rightarrow$  Stel  $y = -\frac{1}{3}x + b$  lijn  $p$  door  $C \Rightarrow 30 = -\frac{1}{3} \cdot (-18) + b$   
 $\Rightarrow$   
 $30 = 6 + b \Rightarrow b = 24 \Rightarrow$  verg. van  $p$  is dus:  $y = -\frac{1}{3}x + 24$
  
- b.  $p$  snijden met de  $x$ -as  $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3}x + 24 \Rightarrow \frac{1}{3}x = 24$  dus  $x = 72 \Rightarrow$  snijpunt met de  $x$ -as is  
dus  $(72, 0)$ . Voor de  $y$ -as geldt dat  $x = 0 \Rightarrow y = 24 \Rightarrow$  snijpunt  $y$ -as is  $(0, 24)$
  
5.  $k: y = ax + 10$
  
- a.  $k$  door  $P(-20, 0) \Rightarrow 0 = -a \cdot 20 + 10 \Leftrightarrow 20 \cdot a = 10 \Leftrightarrow a = 0,5$
  
- b.  $k$  door  $Q(2, -4) \Rightarrow -4 = a \cdot 2 + 10 \Leftrightarrow 2a = -14 \Leftrightarrow a = -7$
  
- c.  $k$  door  $(0, 0) \Rightarrow 0 = 0 + 10 \Rightarrow$  dit kan niet  $\Rightarrow$  voor geen enkele  $a$ .
  
- 6 Gegeven  $k: y = 0,5x + 2$  ;  $l: y = ax - 4$  en  $m: y = -2x + b$
  
- a.  $P(-8, 0)$  op  $m \Rightarrow 0 = -2 \cdot (-8) + b \Leftrightarrow b = -16$
  
- b.  $Q(10, 7)$  op  $m \Rightarrow 7 = -20 + b \Rightarrow b = 27 \Rightarrow m: y = -2x + 27$  Verder is  $m \parallel l \Rightarrow$  de r.c. zijn  
gelijk  $\Rightarrow a = -2$  We krijgen dus  $a = -2$  en  $b = 27$
  
- c. Lijn  $k$  door  $R(8, 6)$  controle :  $6 = 0,5 \cdot 8 + 2$  Dit klopt  $\Rightarrow k$  door  $(8, 6)$   
Lijn  $l$  door  $R \Rightarrow 6 = a \cdot 8 - 4 \Rightarrow 8a = 10 \Leftrightarrow a = 1,25$   
Lijn  $m$  door  $R \Rightarrow 6 = -2 \cdot 8 + b \Rightarrow b = 6 + 16 \Leftrightarrow b = 22$
  
- d. Eerst  $k$  snijden met de  $x$ -as (want  $k$  ligt vast)  $\Rightarrow$  We krijgen dan het snijpunt met de  $x$ -as.  $\Rightarrow$   
 $0,5 \cdot x + 2 = 0 \Leftrightarrow 0,5x = -2 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow$  snijpunt  $S$  is  $(-4, 0)$  Nu de coördinaten van  $S$   
invullen in  $l$  en  $m$ .  $\Rightarrow 0 = a \cdot (-4) - 4 \Leftrightarrow 4a = -4 \Rightarrow a = -1$  en

$$0 = -2 \cdot (-4) + b \Rightarrow b = -8$$

7. Lijn  $l$  door A(2,1) en B(6, 4)

a. Bij 4 naar rechts ga je 3 omhoog, dus bij 1 naar rechts ga je 0,75 omhoog.  $\Rightarrow r.c = 0,75$

b.  $y_B - y_A = 3$  en  $x_B - x_A = 4 \Rightarrow$

$$r.c = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 1}{6 - 2} = \frac{3}{4}$$

8.

a.  $l$  door A(-1,1) en B(1,4)  $\Rightarrow$  stel  $l$  is:  $y = ax + b \Rightarrow a = \frac{4 - 1}{1 - (-1)} = 1,5 \Rightarrow y = 1,5x + b$  door (1,4)  $\Rightarrow 4 = 1,5 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 2,5 \Rightarrow$  De vergelijking is:  $y = 1,5x + 2,5$

b.  $k$  door C(-3,5) en D(2,0) stel  $k$  is:  $y = ax + b \Rightarrow a = \frac{5 - 0}{-3 - 2} = -1 \Rightarrow y = -x + b$  door (2, 0)  $\Rightarrow$   
 $0 = -2 + b \Rightarrow b = 2 \Rightarrow y = -x + 2$

c.  $m$  door E(5,3) en F(-7,3) Stel  $m$ :  $y = ax + b \Rightarrow a = \frac{3 - 3}{-7 - 5} = 0$  en door (5,3)  $\Rightarrow$  het is dus een horizontale lijn met vergelijking:  $y = 3$

d.  $n$  door G(180, 360) en F(-7, 3) Stel  $n$  is:  $y = ax + b \Rightarrow a = \frac{360 - 250}{180 - 160} = \frac{110}{20} = 5,5 \Rightarrow$

$$y = 5,5x + b \text{ door G} \Rightarrow 360 = 5,5 \cdot 180 + b \Rightarrow b = 360 - 990 = -630 \Rightarrow n: y = 5,5x - 630$$

9.

a.  $A$  is lineaire functie van  $s$   $s = 15$  en  $A = 300 \Rightarrow$  punt (15, 300) zo ook punt (21, 750)

$$\frac{\Delta A}{\Delta s} = \frac{750 - 300}{21 - 15} = \frac{450}{6} = 75 \Rightarrow A = 75s + b \text{ door (15, 300)} \Rightarrow 300 = 75 \cdot 15 + b \Rightarrow$$

$$b = 300 - 1125 = -825 \Rightarrow \text{De vergelijking van de functie } A \text{ is dus: } A = 75s - 825$$

b.  $R$  is lineaire functie van  $t$   $t = 35$  en  $R = 10 \Rightarrow$  punt (35, 10) zo ook punt (60, 35)

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{35 - 10}{60 - 35} = \frac{25}{25} = 1 \Rightarrow R = t + b \text{ door (35, 10)} \Rightarrow 10 = 35 + b \Rightarrow$$

$$b = -25 \Rightarrow \text{De vergelijking van de functie } R \text{ is dus: } R = t - 25$$

10.  $p$  is een lineaire functie van  $q$ . Bij  $q = 150$  is  $p = 7,75$  en bij  $q = 425$  dan  $p = 2,25$

a.  $p$  is een functie van  $q \Rightarrow$  Bekijk de punten  $(150 ; 7,75)$  en  $(425 ; 2,25)$

$$\frac{\Delta p}{\Delta q} = \frac{7,75 - 2,25}{150 - 425} = \frac{5,5}{-275} = -0,02 \Rightarrow p = -0,02q + b \text{ door } (150 ; 7,75) \Rightarrow$$

$$7,75 = -0,02 \cdot 150 + b \Rightarrow b = 7,75 + 3 = 10,75 \Rightarrow p \text{ is dus: } p = -0,02q + 10,75$$

b. Nu  $q$  uitdrukken in  $p \Rightarrow 0,02q = 10,75 - p \Leftrightarrow q = 537,5 - 50p$

c.  $q = 250$  dan  $p = -0,02 \cdot 250 + 10,75 = 5,75$

d.  $p = 4,25$  dan  $q = 537,5 - 50 \cdot 4,25 = 325$

11.

a. 14.12 dan bij paal 164,0 ; om 14.18 uur dan bij paal 152,8  $t = 0$  om 14.00uur.

d.w.z. bij 14,12 dan  $t = 12$  Zo krijgen we de punten  $(12 ; 164,0)$  en  $(18 ; 152,8) \Rightarrow$

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{152,5 - 164,0}{18 - 12} = \frac{-11,5}{6} = -1,917 \Rightarrow \text{Stel } h : h = -1,917t + b \text{ Door } (12, 164) \Rightarrow$$

$$164 = -1,917 \cdot 12 + b \Rightarrow b \approx 187,0 \Rightarrow h = -1,917t + 187$$

b. Paal 156,7  $\Rightarrow h = 156,7 \Rightarrow 156,7 = -1,917t + 187 \square 1,917t = 30,3 \Rightarrow t \approx 15,8$

Op het tijdstip 14.16 uur wordt paal 156,7 gepasseerd.

12.

a. In 1932  $l = 167$  ; In 1996  $l = 1,75$   $t = 0$  in 1900  $\Rightarrow$  Punten  $(32, 167)$  en  $(96, 175)$

$$\Rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{175 - 167}{96 - 32} = \frac{8}{64} = 0,125 \Rightarrow \text{Stel } L = 0,125t + b \text{ Door het punt } (96, 175) \Rightarrow$$

$$175 = 0,125 \cdot 96 + b \Rightarrow b = 163 \Rightarrow L = 0,125t + 163$$

b. Als  $L = 180$  dan  $180 = 0,125t + 163 \square 0,125t = 17 \square t = 136 \Rightarrow$  In het jaar 2036.

13. Strijdonk heeft 2355 m<sup>3</sup> gas (g)verbruikt en betaalt 1381,90 euro.

Swanenberg heeft 2906 m<sup>3</sup> verbruikt en betaalt 1701,48 euro

a. Stel  $B = a \cdot g + b$  dan  $\frac{\Delta B}{\Delta g} = \frac{1701,48 - 1381,90}{2906 - 2355} = \frac{319,58}{551} = 0,58 \Rightarrow B = 0,58 \cdot g + b$  door

$$(2355 ; 1381,90) \Rightarrow 1381,90 = 0,58 \cdot 2355 + b \Rightarrow b = 1381,90 - 1365,90 = 16 \Rightarrow$$

$$B = 0,58 \cdot g + 16$$

- b. Het vastrecht is het vaste bedrag van 16 euro en de prijs per m<sup>3</sup> gas is 0,58 euro.  
 c. Blik verbruikt 2281 m<sup>3</sup> ⇒ Ze betalen:  $0,58 \cdot 2281 + 16 = 1338,98$  euro.

14. Gegeven  $f(x) = x^2 - 4x + 5$

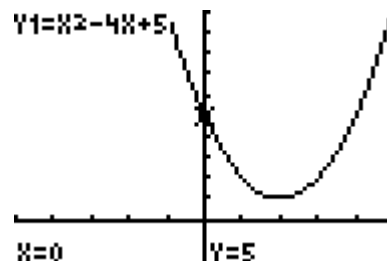
a. Neem b.v. window  $[-5,5] \times [-2,10]$

b. De top is (2,1)

c.

X	Y <sub>1</sub>
-5	10
-4	9
-3	8
-2	7
-1	6
0	5
1	4
2	3
3	4
4	5
5	10

X = -1



15.  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + \frac{2}{3}$

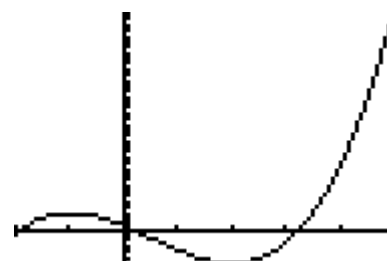
a. Voer in  $y_1 = f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + \frac{2}{3}$

Met de optie maximum vinden we het maximum van 3 bij  $x = -1$ .

Met de optie minimum vinden we het minimum van -6 bij  $x = 2$ .

b.  $D_f = [-2, 5]$  Aan de plot zien we dat het absolute minimum is bij  $x = 2$ . De grootste waarde vinden we bij  $x = 5$

$$f(2) = -6 \text{ en } f(5) = 39 \Rightarrow B_f = [-6, 39]$$

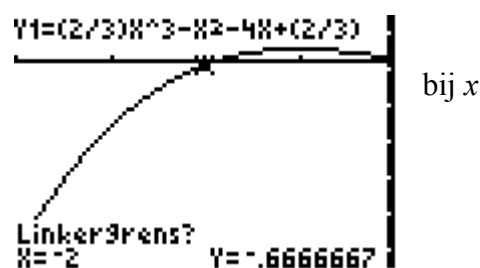


c.  $D_f = [-4, 0]$  Eerst weer plotten ⇒

De kleinste waarde is dan bij  $x = -4$  en de grootste waarde = -1.

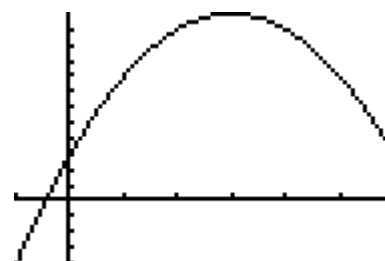
Er geldt  $f(-1) = 3$  en  $f(-4) = -42 \Rightarrow$

$$B_f = [-42, 3]$$

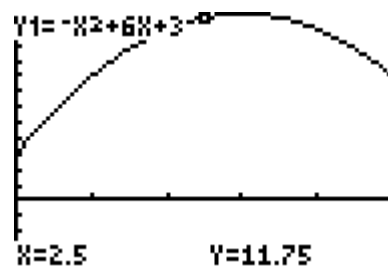


16.  $f(x) = -x^2 + 6x + 3$

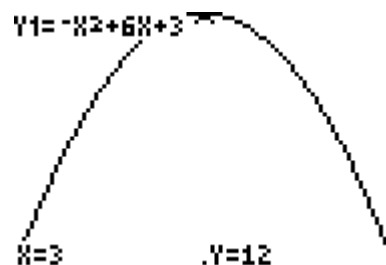
a.  $D_f = [-1, 6]$  De kleinste waarde hebben we bij  $x = -1$  en de grootste waarde vinden we bij het maximum. Met die optie vinden we 'n maximum bij  $x = 3$  van 12. en  $f(-1) = -4 \Rightarrow B_f = [-4, 12]$ .



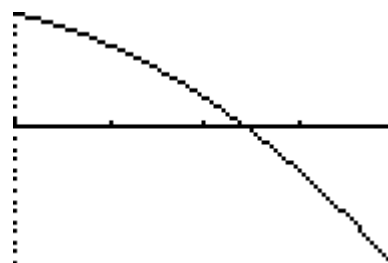
- b.  $D_f = [0,5]$  De kleinste waarde hebben we bij  $x = 0$  en de grootste waarde vinden we bij het maximum. Met die optie vinden we 'n maximum bij  $x = 3$  van 12. en  $f(0) = 3 \Rightarrow B_f = [3,12]$ .



- c.  $D_f = [2,4]$  De kleinste waarde hebben we bij  $x = 2$  en bij  $x = 4$  en de grootste waarde vinden we bij het maximum. Met die optie vinden we 'n maximum bij  $x = 3$  van 12. en  $f(2) = 11 \Rightarrow B_f = [11,12]$ .



- d.  $D_f = [4,8]$  De kleinste waarde hebben we bij  $x = 8$  en de grootste waarde vinden we bij  $x = 4$ .  $f(4) = 11$  en  $f(8) = -13 \Rightarrow B_f = [-13,11]$ .



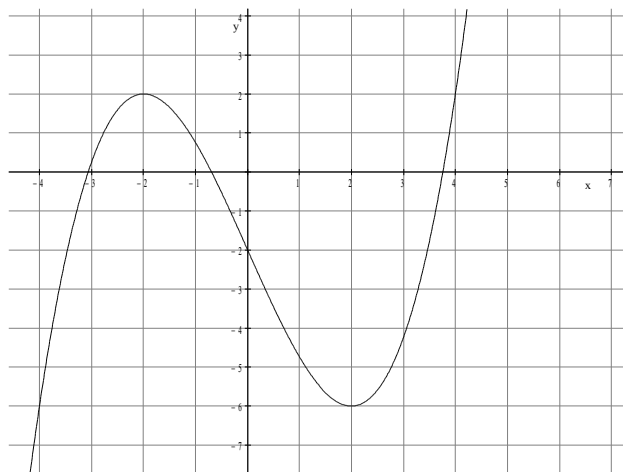
17.  $f(x) = -0,5x + 3$  en  $D_f = [-3,4]$

Dit is een rechte dalende lijn. De kleinste waarde hebben we bij  $x = 4$  en de grootste waarde bij  $x = -3$ .  $f(-3) = 4,5$  en  $f(4) = 1 \Rightarrow B_f = [1 ; 4,5]$

18.  $f(x) = 0,25x^3 - 3x - 2$

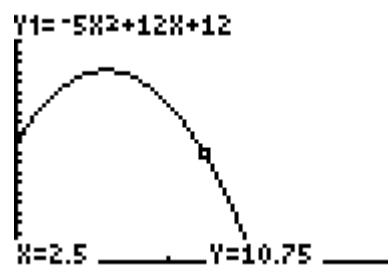
We tekenen eerst de grafiek tussen om een idee te krijgen van het verloop van de grafiek.

- a. De optie maximum geeft bij  $x = -2$  een maximum van  $y = 2$ .  
De optie minimum geeft bij  $x = 2$  een minimum van  $y = -6$ .
- b.  $[-5, 3] \rightarrow [-18,25 ; 2]$  want de grootste waarde binnen dit interval ligt bij  $-2$ .  $\Rightarrow B_f = [-18,25 ; 2]$



- c. Het interval  $[-4, 6]$  De grootste  $y$ -waarde zie je bij  $x = 6$  en de kleinste  $y$ -waarde zie je bij  $x = 2$  en bij  $x = -4 \Rightarrow [-4, 6] \rightarrow [-6, 34] \Rightarrow B_f = [-6, 34]$ .

19.  $h(t) = -5t^2 + 12t + 12$



- a. We moeten het snijpunt met de horizontale as vinden.  
Met de optie zero vinden we het snijpunt bij  $x = 3,16$   
 $\Rightarrow D_h = [0 ; 3,2]$
- b.  $h(0) = 12$  en met de optie maximum vinden we een maximum van  $19,2$  bij  $x \approx 1,2$ . Het minimum is bij  $h = 0$ .  
 $\Rightarrow$  Het bereik is :  $B_h = [0 ; 19,2]$

20.  $f(x) = -x^2 + 6x + p$

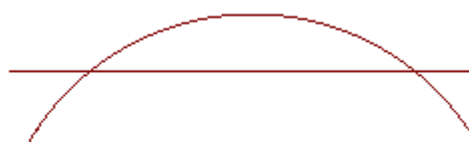
- a.  $p = 1 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 6x + 1$  De top vinden we met de formule  $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} \Rightarrow$   
 $x_{\text{top}} = -\frac{6}{-2} = 3 \Rightarrow$  De top is :  $(3,10)$

- b. De  $x$ -coördinaat van de top is bij  $x = 3 \Rightarrow$  De top is dus  $(3, 9+p)$   
Nu geldt dat deze top op de  $x$ -as ligt  $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow p = -9$ .

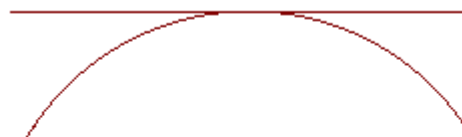
21.  $f_p(x) = 2x^2 - 6x + p$

- a.  $x$ -as raken  $\Rightarrow D = 0 \Rightarrow 36 - 4 \cdot 2 \cdot p = 0 \Rightarrow 8p = 36 \Rightarrow p = 4,5$ .
- b. Een negatief minimum  $\Rightarrow$  De dalparabool heeft dus 2 snijpunten met de  $x$ -as  $\Rightarrow D > 0 \Rightarrow$   
 $36 - 8p > 0 \Rightarrow -8p > -36 \Rightarrow p < 4,5$

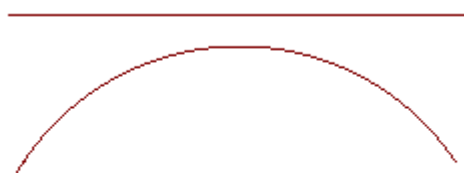
22.



**2 snijpunten met de x-as**  
 **$D > 0$**



**1 snijpunt met de x-as**  
 **$D = 0$**



**geen snijpunt met de**  
**x-as  $D < 0$**

23.  $f_p(x) = -0,5x^2 - 5x + p$

- a. Top  $\Rightarrow x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_{\text{top}} = 5/(-1) = -5 \Rightarrow \text{Top } (-5 ; 12,5 + p)$  . De top ligt op de  $x$ -as  $\Rightarrow y_{\text{top}} = 0 \Rightarrow 12,5 + p = 0 \Rightarrow p = -12,5$
- b. Maximum  $< 0 \Rightarrow D < 0 \Rightarrow (-5)^2 - 4 \cdot (-0,5) \cdot p < 0 \Rightarrow 25 + 2p < 0 \Rightarrow 2p < -25 \Rightarrow p < -12,5$

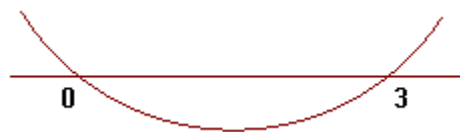
24.  $f_p(x) = 3x^2 + px + 3$

- a. De top ligt op de  $x$ -as  $\Rightarrow$  De parabool raakt de  $x$ -as  $\Rightarrow D = 0 \Rightarrow p^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 0 \Rightarrow p^2 = 36 \Rightarrow p = 6 \vee p = -6$
- b. De dalparabool heeft een negatief minimum  $\Rightarrow$  2 snijpunten met de  $x$ -as  $\Rightarrow D > 0$ .  
 $\Rightarrow p^2 - 36 > 0$  nulpunten :  $p = -6 \vee p = 6$ .  
 $\Rightarrow$  negatief minimum voor  $p < -6 \vee p > 6$ .



25.  $f_p(x) = px^2 + 2px + 3$

- a. Negatief minimum  $\Rightarrow$  Zeker geldt dat we een dalparabool moeten hebben  $\Rightarrow p > 0$   
 Verder snijdt  $f$  de  $x$ -as in 2 punten  $\Rightarrow D > 0 \Rightarrow 4p^2 - 4 \cdot p \cdot 3 > 0 \Rightarrow 4p^2 - 12p > 0$   
 Nulpunten :  $4p(p - 3) = 0 \Rightarrow p = 0$  ( dan is er een rechte lijn)  $\vee p = 3$   
 Uit de schets lezen we af dat  $D > 0$  voor  $p < 0 \vee p > 3$ . Samen met de voorwaarde  $p > 0$  geeft dat  $p > 3$ .
- b. Negatief maximum.  $\Rightarrow$  Het moet dus zeker een bergparabool zijn  $\Rightarrow p < 0$ . Verder hebben we geen snijpunten met de  $x$ -as  $\Rightarrow D < 0 \Rightarrow 0 < p < 3$  Dit is een tegenspraak .  $\Rightarrow$  Geen enkele  $p$  voldoet.



26.  $f_p(x) = -x^2 + px + 2p$

- a. Het is inderdaad een bergparabool. Verder moeten er geen snijpunten met de  $x$ -as zijn  $\Rightarrow D < 0 \Rightarrow p^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (2p) < 0 \Rightarrow p^2 + 8p < 0 \Rightarrow p(p + 8) < 0$   
 Nulpunten  $\Rightarrow p = 0 \vee p = -8$   
 Uit schets lezen we af :  $D < 0$  voor  $-8 < p < 0$ .
- b.  $(2p, -4)$  ligt op de grafiek  $\Rightarrow -4 = -(2p)^2 + p \cdot 2p + 2p \Rightarrow -4 = -4p^2 + 2p^2 + 2p \Rightarrow 2p^2 - 2p - 4 = 0 \Rightarrow p^2 - p - 2 = 0 \Rightarrow (p - 2)(p + 1) = 0 \Rightarrow p = 2 \vee p = -1$ .



$$27. f_p(x) = px^2 + (p+2)x + 3$$

a. Een negatief minimum  $\Rightarrow$  Dalparabool  $\Rightarrow p > 0$ .

Verder moeten we 2 snijpunten met de  $x$ -as hebben  $\Rightarrow$

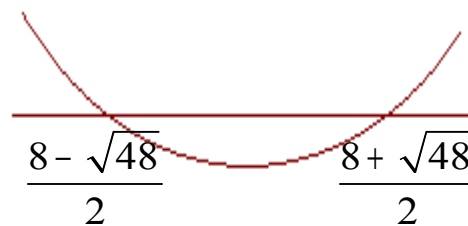
$$D > 0 \Leftrightarrow (p+2)^2 - 4 \cdot p \cdot 3 > 0 \Leftrightarrow p^2 + 4p + 4 - 12p > 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 8p + 4 > 0$$

$$\text{Nulpunten : } p = \frac{8 + \sqrt{48}}{2} \vee p = \frac{8 - \sqrt{48}}{2}$$

Aflezend uit de schets geeft samen met de voorwaarde  $p > 0$ :

$$0 < p < \frac{8 - \sqrt{48}}{2} \vee p > \frac{8 + \sqrt{48}}{2}$$



b. Een positief maximum: Eerst moet gelden dat de parabool een bergparabool is  $\Rightarrow p < 0$ .

Verder zijn er twee snijpunten met de  $x$ -as  $\Rightarrow D > 0$ .

Aflezend uit de schets samen met de voorwaarde  $p < 0$  geeft:  $p < 0$ .

$$28. f(x) = ax^2 + bx \text{ met } a \neq 0.$$

$$a. ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee ax + b = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee ax = -b \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$$

De  $x$ -coördinaat ligt precies in het midden van deze twee punten  $\Rightarrow x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$ .

b. Aangezien de parabool  $y = ax^2 + bx + c$  verkregen wordt door de translatie  $c$  in verticale richting vanuit de parabool  $f(x) = ax^2 + bx$ , blijft de  $x$ -coördinaat van de top dus hetzelfde.

$$29. f(x) = -2x^2 + px + 1$$

Er is een maximum, want  $-1 < 0$ . Voor de top geldt:  $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{p}{-4} = \frac{1}{4}p$

$$\text{Verder geldt } y_{\text{top}} = 9 \Leftrightarrow -2\left(\frac{1}{4}p\right)^2 + p \cdot \frac{1}{4}p + 1 = 9 \Leftrightarrow -\frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{4}p^2 = 8 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{8}p^2 = 8 \Leftrightarrow p^2 = 64 \Leftrightarrow p = 8 \vee p = -8$$

$$30. f(x) = x^2 + px + 3$$

$$x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -p/2 = -0,5p \text{ De top ligt op de lijn } y = x + 1 \Rightarrow \text{top } (-0,5p, -0,5p + 1)$$

De top ligt natuurlijk ook op de grafiek van  $f$ .  $\Rightarrow$

$$(-0,5p)^2 + p \cdot (-0,5p) + 3 = -0,5p + 1 \Leftrightarrow 0,25p^2 - 0,5p^2 + 3 = -0,5p + 1 \Leftrightarrow$$

$$0,25p^2 - 0,5p - 2 = 0 \Leftrightarrow p^2 - 2p - 8 = 0 \Leftrightarrow (p-4)(p+2) = 0 \Leftrightarrow p = 4 \vee p = -2$$

31.  $f(x) = px^2 + 6x + 1$

a. Top bij  $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_{\text{top}} = \frac{-6}{2p} = -\frac{3}{p} \Rightarrow p\left(\frac{-3}{p}\right)^2 + 6\left(\frac{-3}{p}\right) + 1 = -2 \square$

$$\frac{9}{p} + \frac{-18}{p} = -3 \Leftrightarrow \frac{9}{p} = 3 \square p = 3$$

b.  $p = 3 > 0 \Rightarrow$  dalparabool  $\Rightarrow$  Er is dus een minimum.

32.  $f(x) = px^2 + (p+2)x + 5$

$$x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{p+2}{2p} \quad \text{Nu geldt : } y_{\text{top}} = 3 \Rightarrow p\left(-\frac{p+2}{2p}\right)^2 - (p+2)\frac{p+2}{2p} + 5 = 3 \square$$

$$\frac{(p+2)^2}{4p} - \frac{(p+2)^2}{2p} = -2 \Leftrightarrow \frac{(p+2)^2}{4p} - \frac{2(p+2)^2}{4p} = -2 \Leftrightarrow -\frac{(p+2)^2}{4p} = -2 \square (p+2)^2 = 8p \square$$

$$p^2 + 4p + 4 - 8p = 0 \square p^2 - 4p + 4 = 0 \square (p-2)(p-2) = 0 \Rightarrow p = 2$$

33.  $f(x) = px^2 + (p-4)x + 3$  De top op de lijn  $y = x + 9$

$$x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{p-4}{2p} \quad \text{De top ligt op de lijn } y = x + 9 \Rightarrow y_{\text{top}} = -\frac{p-4}{2p} + 9$$

De top ligt ook op de grafiek van  $f$ .  $\Rightarrow$

$$p\left(-\frac{p-4}{2p}\right)^2 - (p-4)\frac{p-4}{2p} + 3 = -\frac{p-4}{2p} + 9 \square \frac{(p-4)^2}{4p} - \frac{(p-4)^2}{2p} + 3 = 9 - \frac{p-4}{2p} \square$$

$$(p-4)^2 - 2(p-4)^2 + 12p = 36p - 2(p-4) \square -(p-4)^2 - 24p + 2(p-4) = 0 \square$$

$$-p^2 + 8p - 16 - 24p + 2p - 8 = 0 \square -p^2 - 14p - 24 = 0 \square p^2 + 14p + 24 = 0$$

Nu de GR gaan gebruiken : Voer in :  $y_1 = x^2 + 14x + 24$  Met de optie zero vinden we

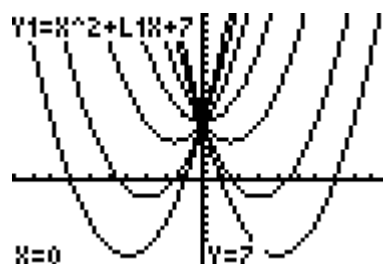
$$x = p = -12 \vee x = p = -2$$

$$\text{Als } p = -12 \text{ dan } x_{\text{top}} = -\frac{-12-4}{-24} = -\frac{2}{3} \text{ Dan } y_{\text{top}} = 8\frac{1}{3}$$

$$\text{Als } p = -2 \text{ dan } x_{\text{top}} = -\frac{-2-4}{-4} = -1,5 \text{ Dan } y_{\text{top}} = 7,5.$$

34.  $f(x) = x^2 + px + 7$

a. Zie de figuur.



b. Voor de top geldt:  $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{p}{2} \Rightarrow$   
 $p = -2x_{\text{top}}$ .

Voor de  $\Rightarrow$ -coördinaat van de top geldt:  $y_{\text{top}} = (x_{\text{top}})^2 + (-2x_{\text{top}})(x_{\text{top}}) + 7 = -(x_{\text{top}})^2 + 7$

c. Aangezien we dit voor alle waarden van  $p$  bekijken geldt dus voor alle toppen:  $y = -x^2 + 7$

35.  $f_p(x) = -\frac{1}{8}x^2 + px - 6$

Voor de  $x$ -coördinaat van de top geldt:  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{p}{(-\frac{1}{4})} = 4p$  Voor de  $y$ -coördinaat van de top

geldt:  $y = -\frac{1}{8}x^2 + px - 6$  Verder weten dat voor de top geldt:  $p = 0,25x \Rightarrow$

De vergelijking waarop alle toppen liggen is:  $y = -\frac{1}{8}x^2 + 0,25x \cdot x - 6 \quad \square$

$y = \frac{1}{8}x^2 - 6$

36.  $f_p(x) = px^2 + 6x + p$

Voor de top geldt:  $\begin{cases} x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2p} \Rightarrow p = -\frac{3}{x} \\ y_{\text{top}} = px^2 + 6x + p \end{cases}$  Nu dit invullen  $\Rightarrow$

$f_p(x) = \left(-\frac{3}{x}\right)x^2 + 6x + \left(-\frac{3}{x}\right) = -3x + 6x - \frac{3}{x} \Leftrightarrow y = 3x - \frac{3}{x}$

37.  $f_p(x) = -x^2 + px + 2p$

Voor de  $x$ -coördinaat van de top geldt:  $x_{\text{top}} = \frac{-p}{-2} \Rightarrow p = 2x$  Dit nu invullen in de gegeven vergelijking  $\Rightarrow y = -x^2 + 2x^2 + 4x \quad \square \quad y = x^2 + 4x$

38.  $f_p(x) = p^2x^2 - 2px + 3$

Voor de  $x$ -coördinaat van de top geldt:  $x_{\text{top}} = \frac{2p}{2p^2} \Rightarrow p = \frac{1}{x}$  Dit nu invullen in de gegeven

vergelijking  $\Rightarrow y = \left(\frac{1}{x}\right)^2 x^2 - 2\left(\frac{1}{x}\right)x + 3 = 2 \Rightarrow$  De gevraagde kromme is:  $y = 2$

39.  $f_p(x) = px^2 - px + 1$

Voor de  $x$ -coördinaat van de top geldt:  $x_{\text{top}} = \frac{p}{2p} = \frac{1}{2}$  en  $y_{\text{top}} =$

$$p\left(\frac{1}{2}\right)^2 - p\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = -\frac{1}{4}p + 1$$

$\Rightarrow$  De gevraagde kromme is:  $x = 0,5$

40.  $f_p(x) = px^2 + x + \frac{1}{p}$

a. Voor de top geldt:  $x = -\frac{1}{2p}$  Voor de  $y_{\text{top}}$  geldt:  $y = p\left(\frac{1}{2p}\right)^2 - \frac{1}{2p} + \frac{1}{p} = \frac{1}{4p} - \frac{1}{2p} + \frac{1}{p}$

gegeven is dat de top op de lijn  $y = 6$  ligt  $\Rightarrow \frac{1}{4p} - \frac{1}{2p} + \frac{1}{p} = 6 \Rightarrow 1 - 2 + 4 = 24p \Leftrightarrow p = \frac{1}{8}$

b. Zie a. Bij de top geldt:  $x = -\frac{1}{2p} \Rightarrow p = -\frac{1}{2x}$  Dit nu invullen in de vergelijking  $\Rightarrow$

$$y = -\frac{1}{2x}x^2 + x + \frac{1}{-2x} \Leftrightarrow y = -0,5x + x - 2x \Leftrightarrow y = -1,5x$$

41.  $f_p(x) = px^2 - 10x + p + 3$

a. De top op de lijn  $y = -x - 5$ .  $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-10}{2p} = \frac{5}{p} \Rightarrow$

$$y_{\text{top}} = p\left(\frac{5}{p}\right)^2 - 10\left(\frac{5}{p}\right) + p + 3 = \frac{25}{p} - \frac{50}{p} + p + 3 = -\frac{25}{p} + p + 3$$

De top ligt op de lijn  $y = -x - 5 \Rightarrow -\frac{25}{p} + p + 3 = -\frac{5}{p} - 5 \Rightarrow -25 + p^2 + 3p = -5 - 5p \quad \square$

$$p^2 + 8p - 20 = 0 \quad \square (p + 10)(p - 2) = 0 \quad \square p = -10 \vee p = 2$$

$p = -10 \Rightarrow f_{-10}(x) = -10x^2 - 10x - 7 \Rightarrow$  Bergparabool met max.  $f_{-10}(-0,5) = -4,2$

$p = 2 \Rightarrow f_2(x) = 2x^2 - 10x + 5 \Rightarrow$  Dalparabool met min.  $f_2(2,5) = -7,5$

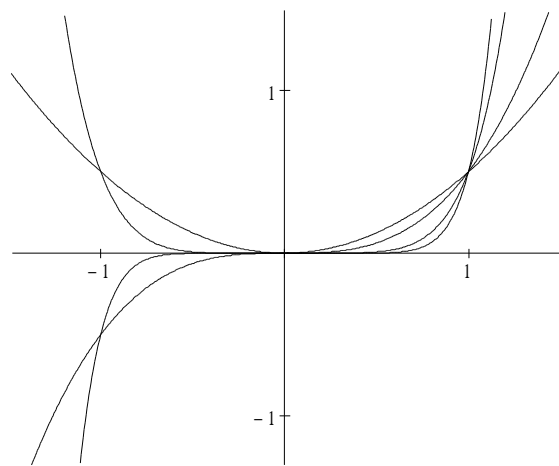
b. Uit a geldt:  $p = \frac{5}{x}$  Invullen  $\Rightarrow y = \left(\frac{5}{x}\right)x^2 - 10x + \frac{5}{x} + 3 \Leftrightarrow y = 5x - 10x + \frac{5}{x} + 3 \quad \square$

$$y = -5x + \frac{5}{x} + 3$$

42.

a. Zie figuur.

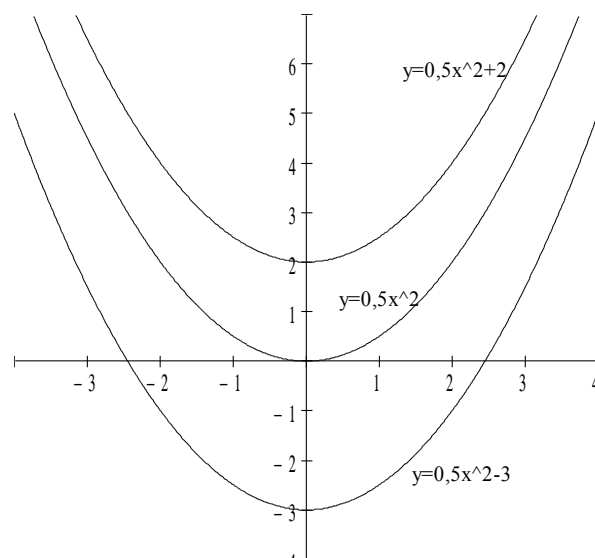
b. De grafieken gaan allemaal door de punten (0,0) en (1;0,5)



- c. Geen punt onder de  $x$ -as bij  $y = 0,5x^2$  en bij de functie  $y = 0,5x^6$
- d. Zowel  $y = 0,5x^2$  als  $y = 0,5x^6$  hebben een as van symmetrie.

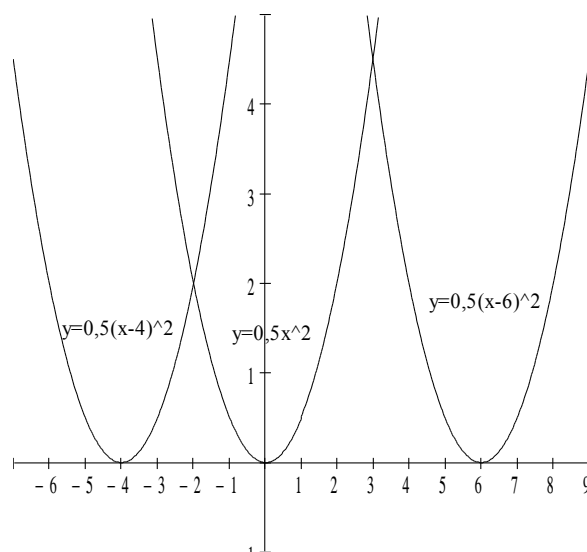
43.

- a. Zie de figuur.
- b. De grafiek van  $y = 0,5x^2 + 2$  ligt 2 eenheden hoger dan de grafiek van  $y = 0,5x^2$   
De grafiek van  $y = 0,5x^2 - 3$  ligt 3 eenheden lager dan de grafiek van  $y = 0,5x^2$
- c. Door de grafiek van  $y = 0,5x^2$  6 eenheden omhoog te schuiven krijg je de grafiek van  $y = 0,5x^2 + 6$



44.

- a. Zie de figuur. Hierbij zijn alle drie de grafieken geplot.
- Door de grafiek van  $y = 0,5x^2$  6 naar rechts te verschuiven krijg je de grafiek van  $y = 0,5(x - 6)^2$
- b. Door de grafiek van  $y = 0,5x^2$  4 eenheden naar links te schuiven krijg je de grafiek van  $y = 0,5(x + 4)^2$
- c. Door de grafiek van  $y = 0,5x^2$  2 eenheden naar rechts te verschuiven krijg je de grafiek van de functie  $y = 0,5(x - 2)^2$



36.

- a.  $y = -5x^2 \xrightarrow{\text{T}(2,5)} y = -5(x - 2)^2 + 5$
- b.  $y = -5x^2 \xrightarrow{\text{T}(-3,6)} y = -5(x + 3)^2 + 6$
- d.  $y = -5x^2 \xrightarrow{\text{T}(7,0)} y = -5(x - 7)^2$

46.

$$y = 2x^2 - \underline{T(-2,0)} \rightarrow g(x) = 2(x+2)^2$$

$$y = 2x^2 - \underline{T(2,-2)} \rightarrow h(x) = 2(x-2)^2 - 2$$

$$y = 2x^2 - \underline{T(-1,-3)} \rightarrow k(x) = 2(x+1)^2 - 3$$

$$y = 2x^2 - \underline{T(1,-4)} \rightarrow y = 2(x-1)^2 - 4$$

47.

a.  $y = -3x^2 - \underline{T(0,2)} \rightarrow f(x) = -3x^2 + 2 \Rightarrow \max. f(0) = 2 \text{ en } B_f = \llcorner \llcorner , 2]$

b.  $y = -3x^4 - \underline{T(2,8)} \rightarrow g(x) = -3(x-2)^4 + 8 \Rightarrow \max. g(2) = 8 \text{ en } B_g = \llcorner \llcorner , 8]$

c.  $y = 5x^2 - \underline{T(-1,0)} \rightarrow h(x) = 5(x+1)^2 \Rightarrow \min. h(-1) = 0 \text{ en } B_h = [0 , \rightarrow >$

d.  $y = 5x^6 - \underline{T(0,1)} \rightarrow k(x) = 5x^6 + 1 \Rightarrow \min. k(0) = 1 \text{ en } B_k = [1 , \rightarrow >$

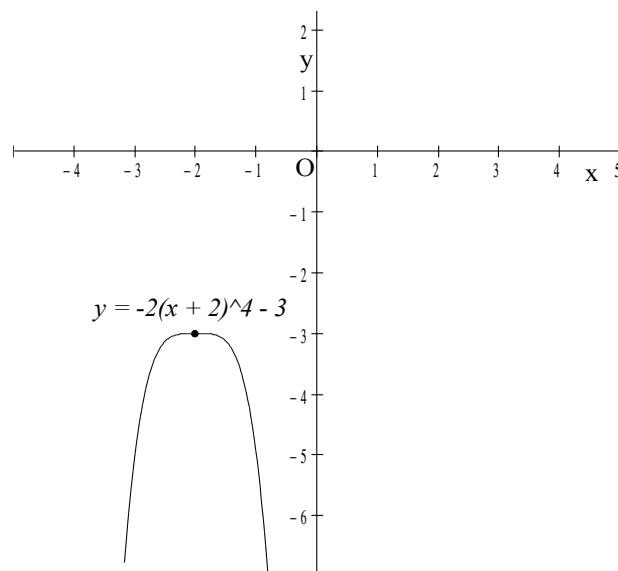
e.  $y = -0,5x^2 - \underline{T(100,0)} \rightarrow l(x) = -0,5(x-100)^2 \Rightarrow \max. l(100) = 0 \text{ en } B_l = \llcorner \llcorner , 0]$

f.  $y = -0,4x^2 - \underline{T(-0,1;-0,3)} \rightarrow m(x) = -0,4(x+0,1)^2 - 0,3 \Rightarrow \max. m(-0,1) = -0,3 \text{ en } B_m = \llcorner \llcorner , -0,3]$

48.

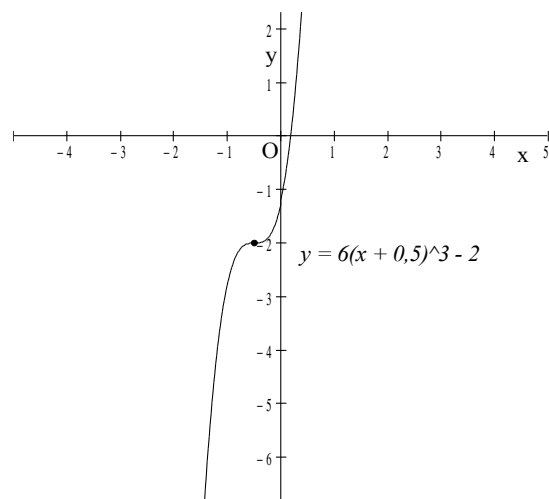
a.  $y = -2x^4 - \underline{T(-2,-3)} \rightarrow f(x) = -2(x+2)^4 - 3$

$\Rightarrow$  De top is  $(-2,-3)$  en  
het maximum is  $-3$  bij  $x = -2$ .



b.

$y = 6x^3 - \underline{T(-0,5;-2)} \rightarrow g(x) = 6(x+0,5)^3 - 2$



$\Rightarrow$  Punt van symmetrie is  $(-0,5 ; -2)$

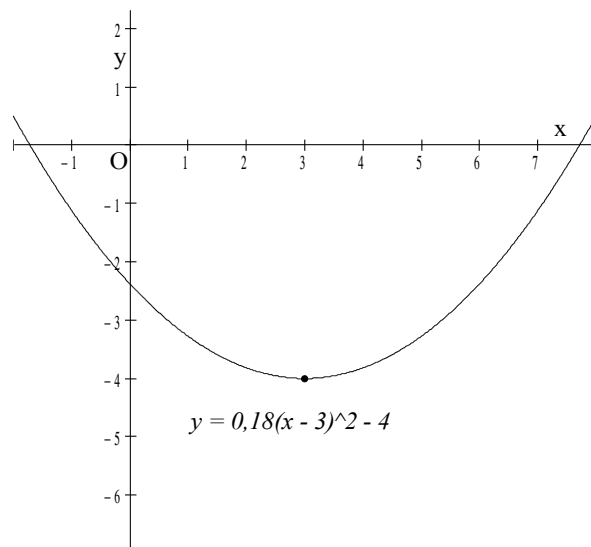
Er is geen extreme waarde.

c.

$$y = 0,18x^2 - \frac{T(3;-4)}{2} \rightarrow h(x) = 0,18(x-3)^2 - 4$$

$\Rightarrow$

De top is  $(3,-4)$  en er is een minimum van  $-4$  bij  $x = 3$ .

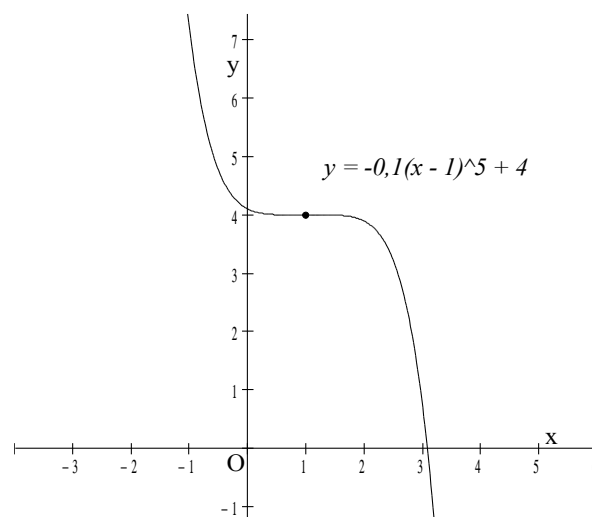


d.

$$y = -0,1x^5 - \frac{T(1;4)}{5} \rightarrow k(x) = -0,1(x-1)^5 + 4$$

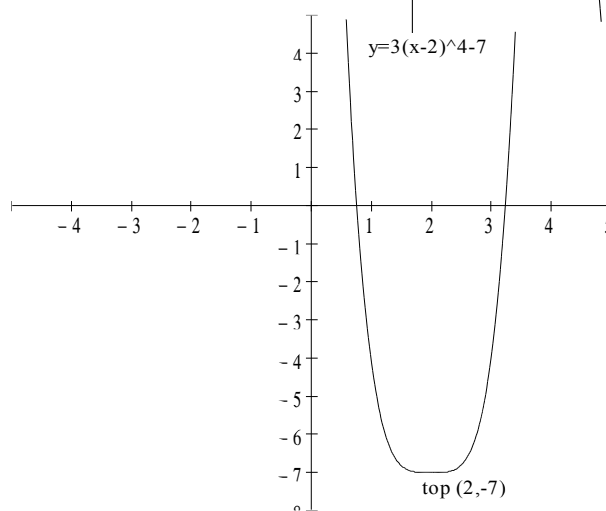
$\Rightarrow$

Er is geen extreme waarde en het punt van symmetrie is  $(1,4)$ .

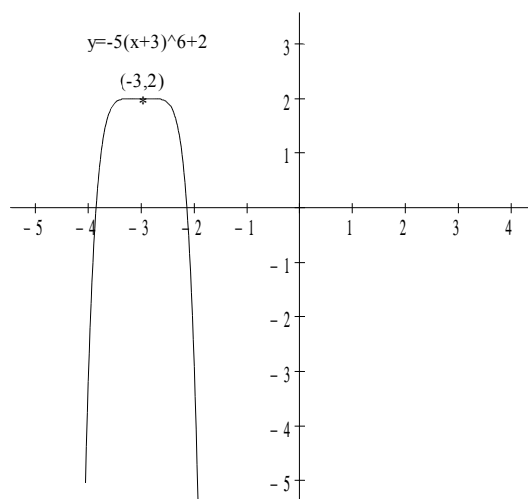


49.

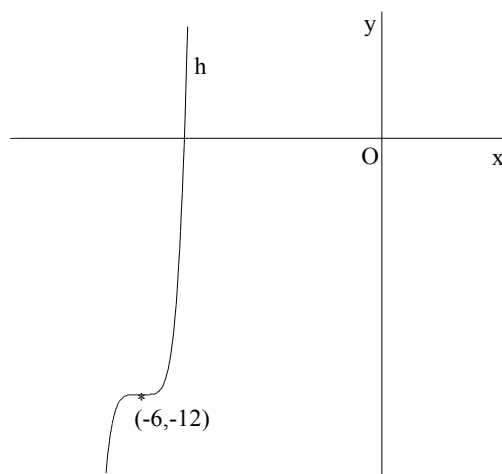
a.  $f(x) = 3(x-2)^4 - 7$



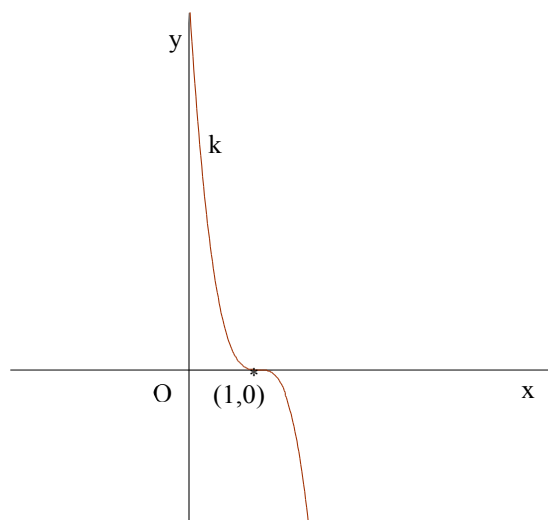
b.  $g(x) = -5(x + 3)^6 + 2$



c.  $h(x) = 8(x + 6)^5 - 12$



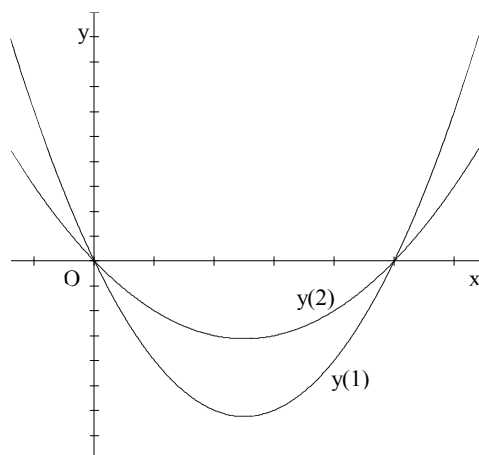
d.  $k(x) = -8(x - 1)^3$



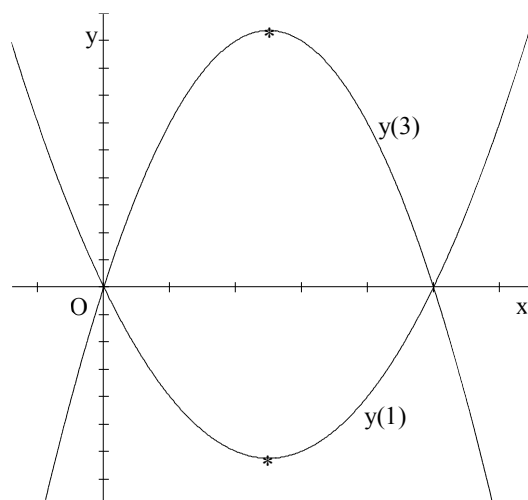
50. Zie werkblad.

51.  $y_1 = x^2 - 5x$   
 $y_2 = 0,5(x^2 - 5x)$   
 $y_3 = -1,5(x^2 - 5x)$

a. De grafiek van  $y_2$  ontstaat uit die van  $y_1$  door de hoogtes van de punten van  $y_1$  te halveren.



b. De grafiek van  $y_3$  ontstaat uit die van  $y_1$  door de hoogtes te spiegelen en vervolgens met 1,5 te vermenigvuldigen.



52.

$$y = -0,5x^3 - \frac{T(-3,-5)}{\rightarrow} y = -0,5(x+3)^3 - 5 - \frac{verm.x-as;-3}{\rightarrow} y = -3(-0,5(x+3)^3 - 5) \Rightarrow$$

De beeldgrafiek wordt dus :  $y = 1,5(x+3)^3 + 15$

53.

a.  $f(x) = 0,5(x-3)^4 + 7 - \frac{T(1,2)}{\rightarrow} y = 0,5(x-4)^4 + 9 - \frac{verm.x-as;1,5}{\rightarrow} y = 0,75(x-4)^4 + 13,5$   
 $\Rightarrow$  De top van de beeldgrafiek is : (4 ; 13,5)

b.  $g(x) = -2,5(x+4)^6 - 7 - \frac{verm.x-as;2}{\rightarrow} y = -5(x+4)^6 - 14 - \frac{T(-1,3)}{\rightarrow} y = -5(x+5)^6 - 11$   
 $\Rightarrow$  De top van de beeldgrafiek is (-5, -11).

54.

a.  $i = 0,3x^4 \xrightarrow{T(-5,6)} y = 0,3(x+5)^4 + 6 \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } -3} y = -3(0,3(x+5)^4 + 6) \Rightarrow$   
 De beeldgrafiek wordt:  $y = -0,9(x+5)^4 - 18$  en de coördinaten van de top zijn  $(-5, -18)$

b.  $y = 0,3x^4 \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } -3} \Rightarrow y = -0,9x^4 \xrightarrow{T(-5,6)} y = -0,9(x+5)^4 + 6 \Rightarrow$  De beeldgrafiek wordt dus:  $y = -0,9(x+5)^4 + 6$  en de coördinaten van de top zijn  $(-5, 6)$

55

a. Een spiegeling t.o.v. de  $x$ -as komt overeen met een vermenigvuldiging met factor  $-1$  t.o.v. de  $x$ -as, want bij spiegelen worden de  $y$ -coördinaten tegengesteld.

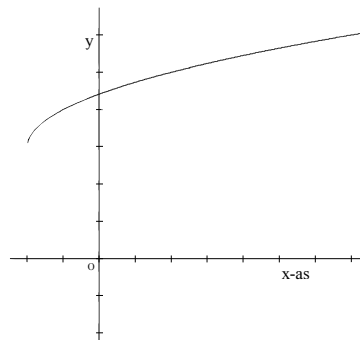
b.  $y = 3(x-1)^2 - 6 \xrightarrow{\text{S t.o.v. de } x\text{-as}} y = -3(x-1)^2 + 6$

56

a.  $y = \sqrt{x}$   $D = [0, \rightarrow >$  en  $B = [0, \rightarrow >$

b.  $y = \sqrt{(x+2)} + 3$

$y = \sqrt{x} \xrightarrow{T(-2,3)} y = \sqrt{(x+2)} + 3$



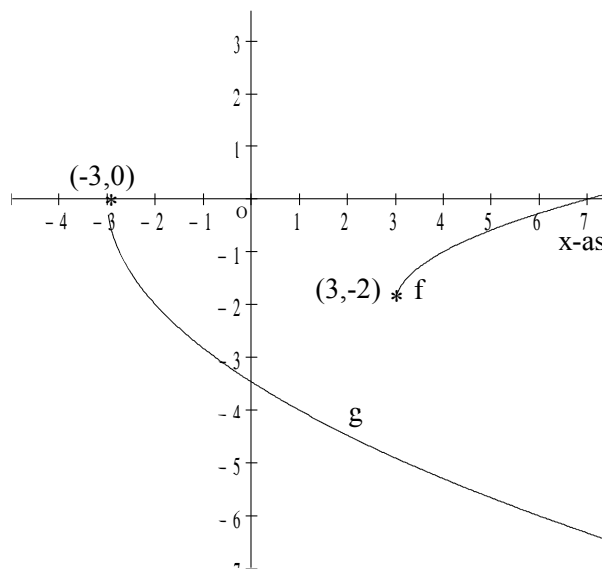
57.

$f(x) = \sqrt{(x-3)} - 2$  en  $g(x) = -2\sqrt{(x+3)}$

a.  $y = \sqrt{x} \xrightarrow{T(3,-2)} y = \sqrt{(x-3)} - 2$

$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } -2} y = -2\sqrt{x} \xrightarrow{T(-3,0)} y = -2\sqrt{(x+3)}$

b.



c.  $D_f = [3, \rightarrow >$  en  $B_f = [-2, \rightarrow >$   $D_g = [-3, \rightarrow >$  en  $B_g = \leftarrow \leftarrow, 0]$

58.

$$f(x) = 2\sqrt{x} - 3 \quad \text{en} \quad g(x) = -\sqrt{x+5}$$

a.  $y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{verm. x-as, } 2} y = 2\sqrt{x} \xrightarrow{T(0, -3)} y = 2\sqrt{x} - 3$

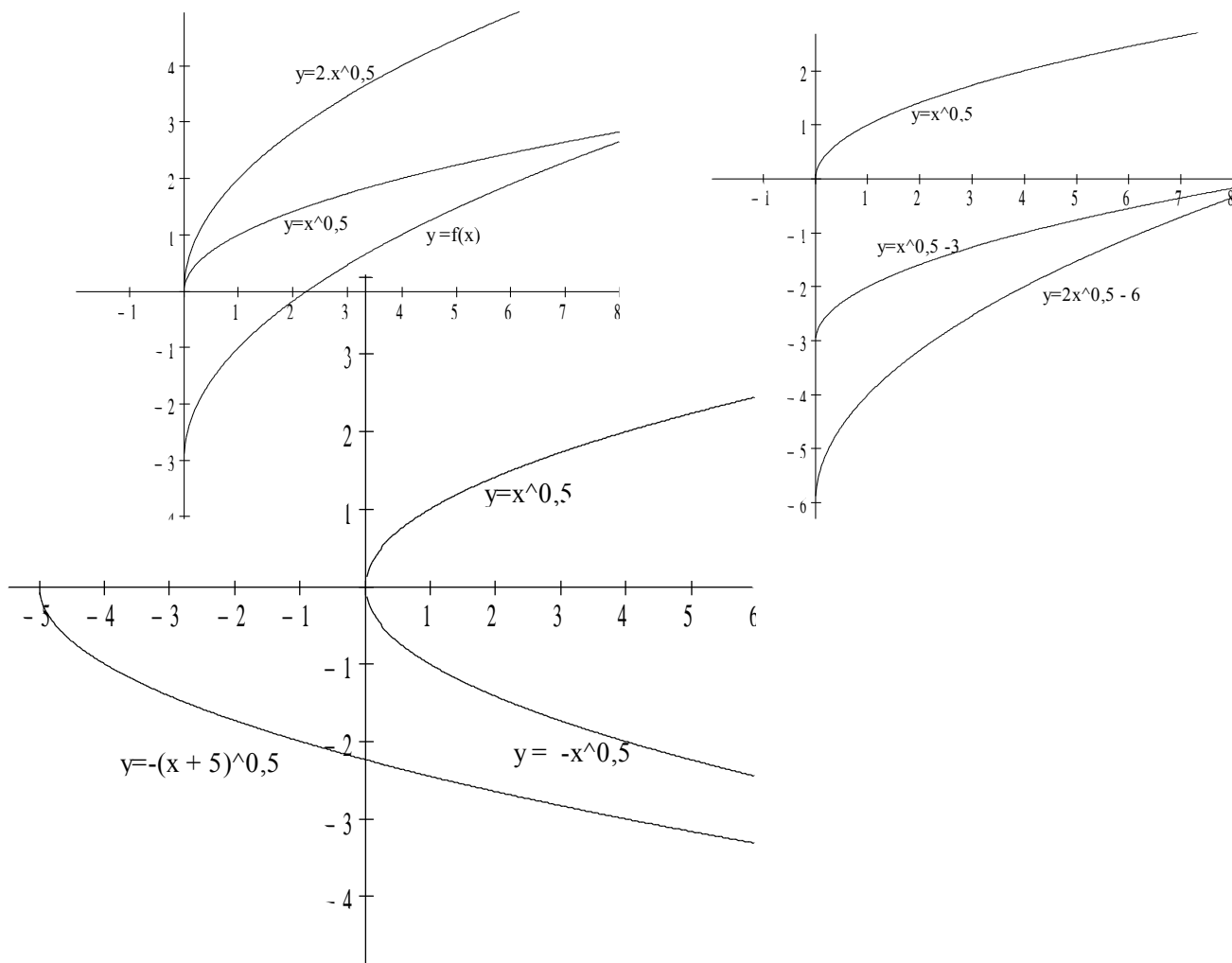
$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{S in de x-as}} y = -\sqrt{x} \xrightarrow{T(-5, 0)} y = -\sqrt{x+5}$$

Opmerking: Als je de afbeeldingen zou omdraaien dan krijg je niet altijd hetzelfde resultaat !!

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{T(0, -3)} y = \sqrt{x} - 3 \xrightarrow{\text{verm. x-as, } 2} y = 2(\sqrt{x} - 3) \Leftrightarrow y = 2\sqrt{x} - 6 \quad \text{anders}$$

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{T(-5, 0)} y = \sqrt{x+5} \xrightarrow{\text{S in de x-as}} y = -\sqrt{x+5} \quad \text{Dit is wel hetzelfde.}$$

b.



c.  $D_f = [0, \rightarrow >$  ;  $B_f = [-3, \rightarrow >$  en  $D_g = [-5, \rightarrow >$  ;  $B_g = < \leftarrow ; 0 ]$

59.	functie	beginpunt	domein	bereik
a.	$f(x) = \sqrt{x+5} + 3$	$(-5, 3)$	$D_f = [-5, \rightarrow >$	$B_f = [3, \rightarrow >$
b.	$g(x) = \sqrt{x+3} - 7$	$(-3, -7)$	$D_g = [-3, \rightarrow >$	$B_g = [-7, \rightarrow >$
c.	$h(x) = -2\sqrt{x+1}$	$(-1, 0)$	$D_h = [-1, \rightarrow >$	$B_h = < \leftarrow , 0 ]$
d.	$k(x) = 3\sqrt{x} + 1$	$(0, 1)$	$D_k = [0, \rightarrow >$	$B_k = [1, \rightarrow >$
e.	$l(x) = -\sqrt{x-1} - 1$	$(1, -1)$	$D_l = [1, \rightarrow >$	$B_l = < \leftarrow , -1 ]$
f.	$m(x) = -3 + \sqrt{x}$	$(0, -3)$	$D_m = [0, \rightarrow >$	$B_m = [-3, \rightarrow >$

60. Zie werkboek.

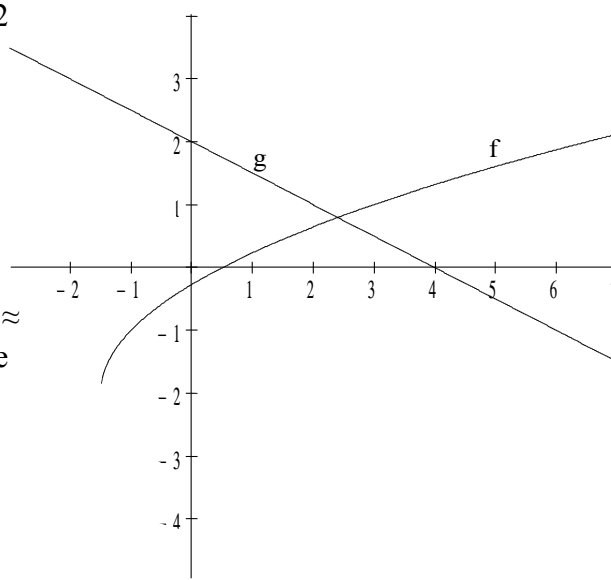
61.  $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$

- a. Beginpunt  $(2, 1)$   
 b. We komen niet goed in het beginpunt . Zal wel komen door de te grote stapgrootte .

62.  $f(x) = -2 + \sqrt{2x+3}$  en  $g(x) = -0,5x + 2$

- a. Zie de figuur hiernaast  
 b. Domein vinden we door op te lossen  
 $2x+3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -3 \Leftrightarrow x \geq -1,5$   
 $\Rightarrow D_f [-1,5 ; \rightarrow >$  en  $B_f = [-2, \rightarrow >$

- c. Eerst snijpunt  $\Rightarrow$  m.b.v. intersect vinden we  $x \approx 2,41 \Rightarrow$  nu  $f(x) < g(x)$  vinden we door goed af te lezen uit de grafieken  $\Rightarrow [-1,5 ; 2,41 >$



Anders geschreven:

$$-1,5 \leq x < 2,41$$

63.

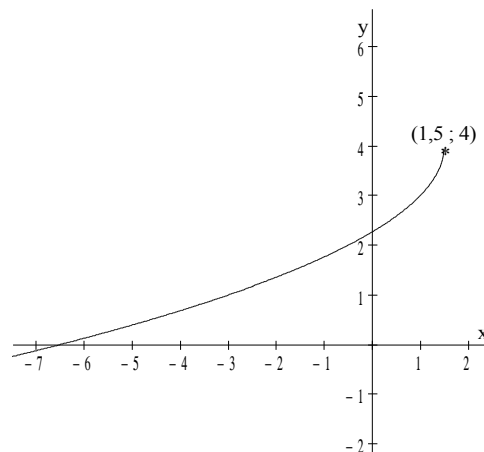
- a.  $f(x) = 3 + \sqrt{8 - 4x}$  voorwaarde:  $8 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow -4x \geq -8 \Leftrightarrow x \leq 2 \Rightarrow D_f = \langle \leftarrow ; 2 \rangle$   
 $B_f = [3, \rightarrow \rangle$  en het beginpunt is:  $(2, 3)$ .
- b.  $g(x) = 3 + \sqrt{4x - 8}$  voorwaarde:  $4x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow 4x \geq 8 \Leftrightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_g = [2, \rightarrow \rangle$   
 $B_g = [3, \rightarrow \rangle$  en het beginpunt is ook  $(2, 3)$ .
- c.  $h(x) = 5 - \sqrt{2x + 6}$  voorwaarde:  $2x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -6 \Leftrightarrow x \geq -3 \Rightarrow D_h = [-3, \rightarrow \rangle$   
 $B_h = \langle \leftarrow, 5] \rangle$  en het beginpunt is  $(-3, 5)$ .
- d.  $k(x) = -2\sqrt{x} + 3$  voorwaarde  $x \geq 0 \Rightarrow D_k = [0, \rightarrow \rangle ; B_k = \langle \leftarrow, 3] \rangle$ ; beginpunt is  $(0, 3)$ .

64.

Gegeven de functie  $f$  door :  $f(x) = 4 - \sqrt{3 - 2x}$

- a. voorwaarde :  $3 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -3 \Leftrightarrow x \leq 1,5$   
 $\Rightarrow D_f = \langle \leftarrow ; 1,5] \rangle$   
 beginpunt  $(1,5 ; 4)$

$x$	1,5	1	-1	-3	-7
$y$	4	3	1,76	1	-0,12



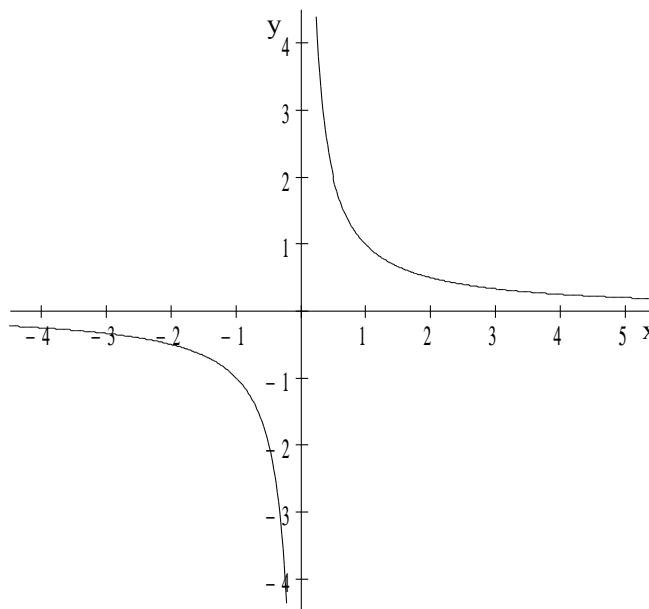
- b.  $B_f = \langle \leftarrow, 4] \rangle$
- c. Eerst snijpunt  $f(x) = -1 \Rightarrow$  m.b.v. intersect krijgen we  $x = -11 \Rightarrow$  na aflezen krijgen we:  
 $-11 < x \leq 1,5$

65.

- a.
- b. Als  $x$  steeds groter wordt dan wordt  $f(x)$  steeds kleiner, maar  $f(x)$  blijft positief en nadert steeds meer de waarde 0.  
 Als  $x$  oneindig klein wordt dan wordt  $f(x)$  steeds groter, maar  $f(x)$  blijft negatief en nadert de waarde 0 steeds meer.

c.

$x$	$y$
-0.02	-50
0.01	-100
0	Error



0.01	100
0.02	50
0.03	33.333

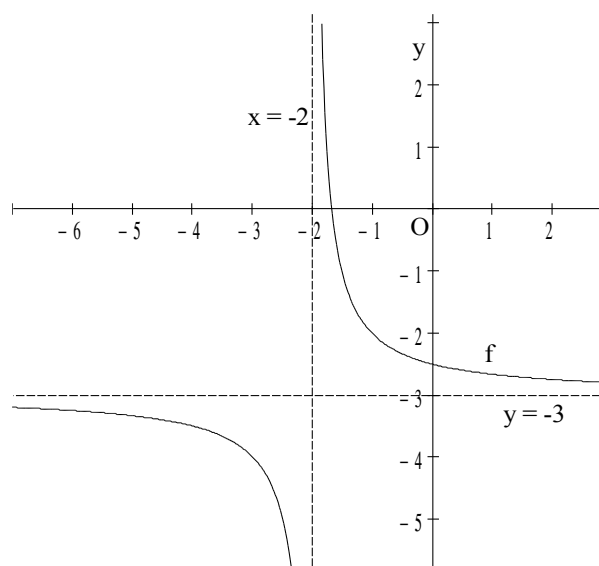
Als van de negatieve kant de 0 nadert dan wordt  $f(x)$  steeds kleiner en als  $x$  van de positieve kant de 0 nadert dan wordt  $f(x)$  steeds groter.

- d. Bij  $\frac{1}{0} = \dots$  hoort  $\dots * 0 = 1$  Je kunt niets invullen want iets maal 0 kan nooit 1 zijn.  
Dus we mogen nooit door 0 delen.

66.  $f(x) = \frac{1}{x+2} - 3$

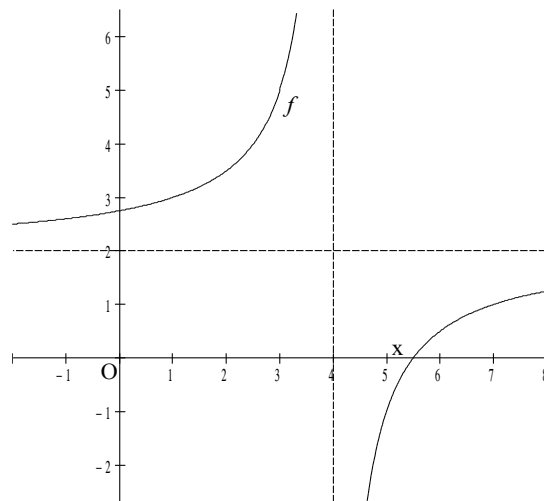
a.  $y = \frac{1}{x} \xrightarrow{T(-2,-3)} y = \frac{1}{x+2} - 3$

- b. H.A.  $y = -3$  en  
V.A.  $x = -2$



67.  $f(x) = \frac{-3}{x-4} + 2$

a.



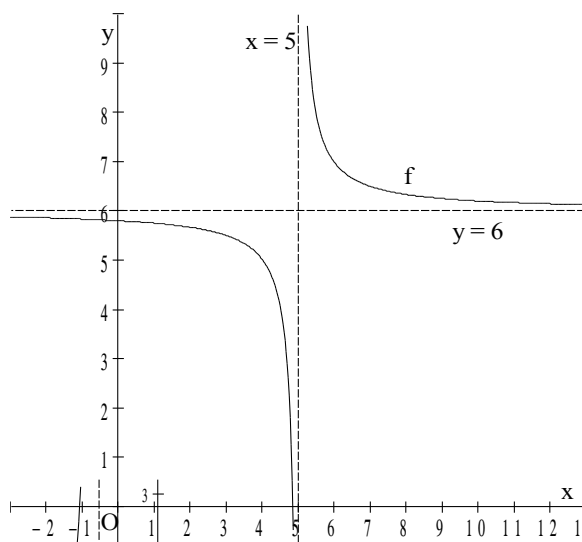
$$y = \frac{1}{x} - \frac{\text{verm.}x\text{-as}_2\text{-3}}{\phantom{x}} \rightarrow y = \frac{-3}{x} - \frac{T(4,2)}{\phantom{x}} \rightarrow f(x) = \frac{-3}{x-4} + 2$$

b. H.A.  $y=2$  en VA  $x=4$ 

68.

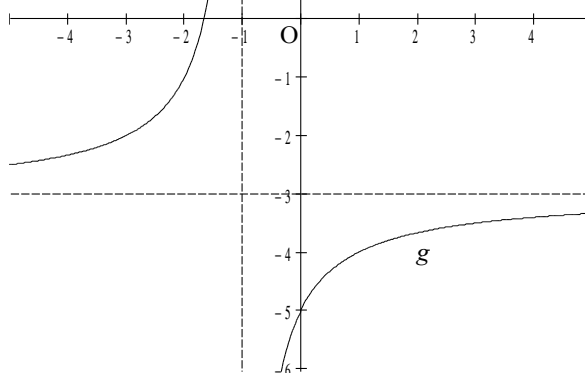
$$a. \quad y = \frac{1}{x} - \frac{T(5,6)}{\phantom{x}} \rightarrow y = \frac{1}{x-5} + 6 \Rightarrow$$

H.A.  $y=6$  en V.A.  $x=5$



$$b. \quad g(x) = \frac{1}{x} - \frac{\text{verm.}x\text{-as}_2\text{-2}}{\phantom{x}} \rightarrow y = \frac{-2}{x}$$

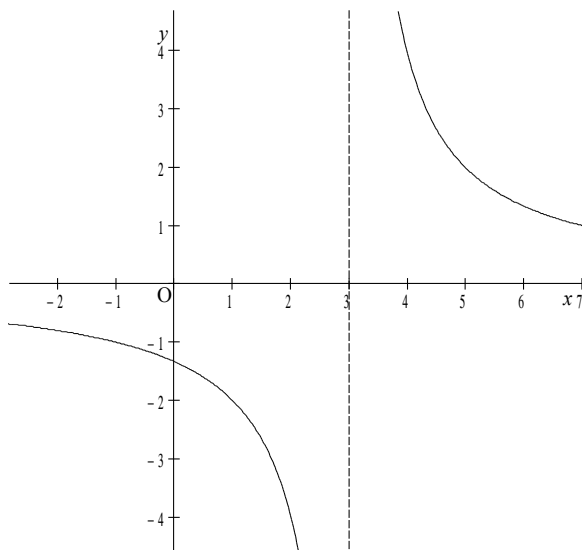
$$y = \frac{-2}{x} - \frac{T(-1,-3)}{\phantom{x}} \rightarrow y = \frac{1}{x+1} - 3$$



$\Rightarrow$  H.A.  $y = -3$  en V.A.  $x = -1$

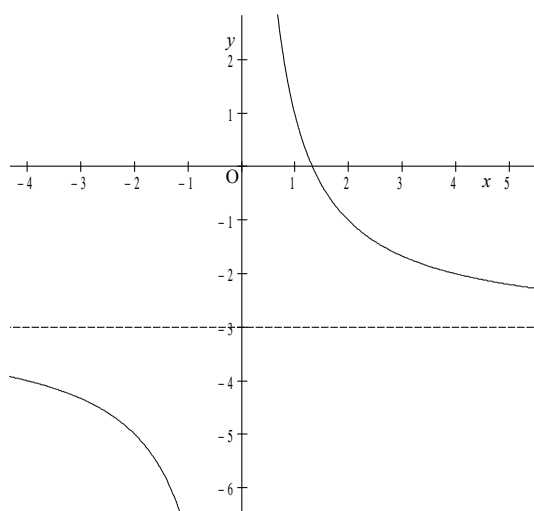
c.  $y = \frac{1}{x} - \frac{\text{verm. x-as, 4}}{\rightarrow} y = \frac{4}{x}$   
 $-\frac{T(3,0)}{\rightarrow} h(x) = \frac{4}{x-3}$

H.A.  $y = 0$  en V.A.  $x = 3$



d.  $y = \frac{1}{x} - \frac{\text{verm. x-as, 4}}{\rightarrow} y = \frac{4}{x}$   
 $-\frac{T(0, -3)}{\rightarrow} k(x) = \frac{4}{x} - 3$

$\Rightarrow$  H.A.  $y = -3$  en V.A.  $x = 0$



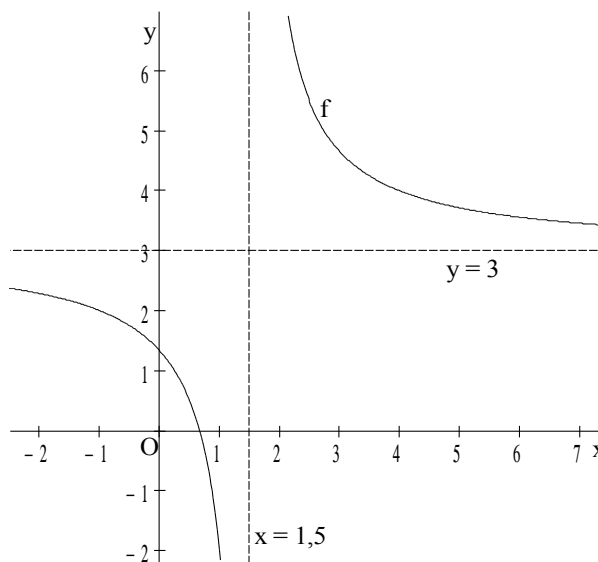
69. Zie werkboek.

70.

a.  $f(x) = \frac{5}{2x-3} + 3$  zie figuur

b.

$x$	$y$
0	1,3333



100	3,0254
200	3,0126
300	3,0084
400	3,0063

De  $y$ -coördinaten naderen steeds meer de waarde 3 als  $x$  steeds groter wordt.  $\Rightarrow$   
De lijn  $y = 3$  is dus H.A.

$x$	$y$
1,4	-22
1,41	-24,78
1,42	-28,25
1,43	-32,71
1,44	-38,67
1,45	-47
1,46	-59,5
1,47	-80,33
1,48	-122
1,49	-247
1,50	error

- c. Als  $x$  steeds meer de waarde 1,5 nadert dan gaat de functiewaarde van  $f(x)$  steeds meer naar een hele grote negatieve waarde.  $\Rightarrow$

De lijn met vergelijking  $x = 1,5$  is dus V.A.

71.

- a.  $f(x) = \frac{3x}{4-x} + 2$  De noemer is 0 bij  $x = 4$  en dan is de teller niet 0  $\Rightarrow$  V.A.  $x = 4$

Verder geldt:  $f(100) \approx -1,125$  en  $f(1000) \approx -1,012$  en  $f(10000) \approx -1,001 \Rightarrow$

Voor zeer grote  $x$  is  $f(x) \approx -1 \Rightarrow$  H.A.  $y = -1$

- b.  $g(x) = \frac{2x-3}{5+2x}$  De noemer is 0 als geldt:  $5 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = -5 \Leftrightarrow x = -2,5$  De teller is dan

$5 - 3 = 2$  niet gelijk aan 0  $\Rightarrow$  V.A.  $x = -2,5$

$g(100) \approx 0,96098$ ;  $g(1000) \approx 0,99601$  en  $g(10000) \approx 0,9996 \Rightarrow$  Voor zeer grote  $x$  is  $f(x) \approx 1$   
 $\Rightarrow$  H.A.  $y = 1$

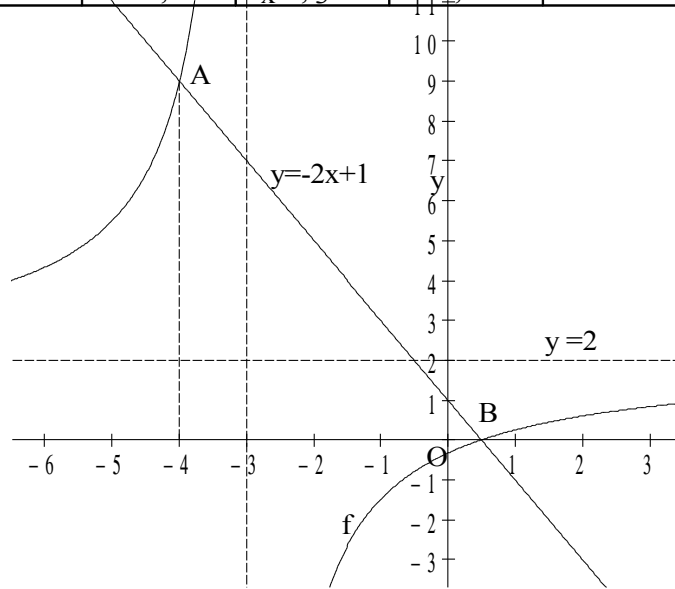
72.  $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$

- a. De noemer is 0 bij  $x = -3$  De teller is dan  $-7 \Rightarrow$  V.A.  $x = -3$

$f(1000) \approx 1,993$ ;  $f(10000) \approx 1,9993 \Rightarrow$  Voor zeer grote  $x$  is  $f(x) \approx 2 \Rightarrow$  H.A.  $y = 2$

$x$	-6	-5	-4	-1	0	1	4
$y$	4,3	5,5	9	-1,5	0,33	0,25	1

- b.  $f(x) \leq -2x + 1$   
eerst de snijpunten.  
Die kunnen we vinden na invoering van  $y_1 = f(x)$  en  $y_2 = -2x + 1$  met de optie intersect.  
We vinden dan de snijpunten bij  $x = -4$  en  $x = 0,5$ .



Nu aflezen uit de grafiek voor welke waarden van  $x$  de hoogte van  $f$  onder de hoogte van

$$y = -2x + 1 \text{ ligt } \Rightarrow \\ x \leq -4 \vee -3 < x \leq 0,5$$

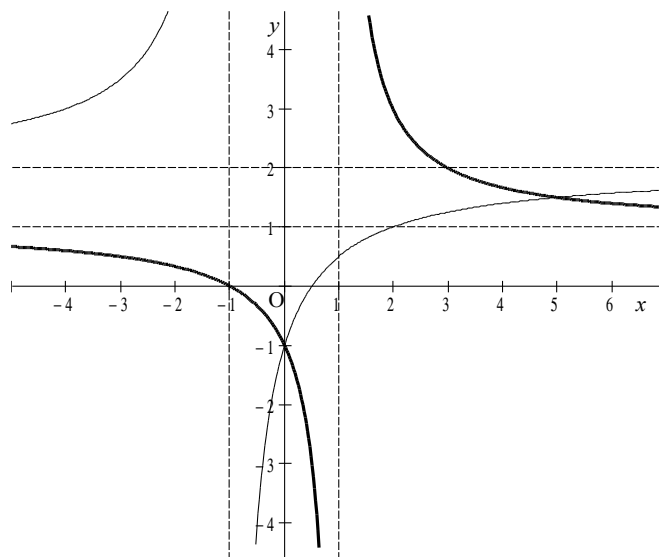
73.  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$  en  $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$

- a.  $f$ : V.A. bij  $x+1=0 \Rightarrow x=-1$   
Als  $x$  heel groot is dan gaat  $f(x)$  naar 2  $\Rightarrow$  H.A.  $y=2$

$x$	0	2	4
$y$	-1	1	7/5

- $g$ : V.A. bij  $x-1=0 \Rightarrow x=1$   
Als  $x$  heel groot is dan gaat  $g(x)$  naar 1  $\Rightarrow$  H.A.  $y=1$

$x$	2	3	5
$y$	3	2	1,5



- b. Eerst de  $x$ -coördinaat van het snijpunt.  $\Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow (2x-1)(x-1) = (x+1)(x+1) \Rightarrow$   
 $2x^2 - 2x - x + 1 = x^2 + x + x + 1 \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 5$   
Nu **aflezen uit de grafieken**:  $f(x) < g(x)$  geeft:  $-1 < x < 0 \vee 1 < x < 5$ .

- c. Eerst de lijn  $y=4$  snijden met zowel  $f$  als met  $g \Rightarrow$   
 $\frac{2x-1}{x+1} = 4 \Leftrightarrow 2x-1 = 4(x+1) \Leftrightarrow 2x-1 = 4x+4 \Leftrightarrow -2x = 5 \Leftrightarrow x = -2,5$   
 $\frac{x+1}{x-1} = 4 \Leftrightarrow x+1 = 4(x-1) \Leftrightarrow x+1 = 4x-4 \Leftrightarrow -3x = -5 \Leftrightarrow x = 1\frac{2}{3}$   
 $\Rightarrow$  De lengte van het lijnstuk  $AB$  is dus:  $2,5 + 1\frac{2}{3} = 4\frac{1}{6}$

74.  $N = 1800 - \frac{1200}{1+3t}$  met  $N$  is het aantal mensen en  $t$  de tijd in dagen. ;  $t \geq 0$

- a. H.A.  $\Rightarrow$  neem  $t$  heel groot b.v.  $N(1000) \approx 1799,6$  en  $N(10000) \approx 1800 \Rightarrow$  Voor hele grote waarden van  $t$  is  $N(t) \approx 1800 \Rightarrow$  H.A.  $N = 1800$

D.w.z. dat het aantal mensen de 1800 nooit zal overschrijden.

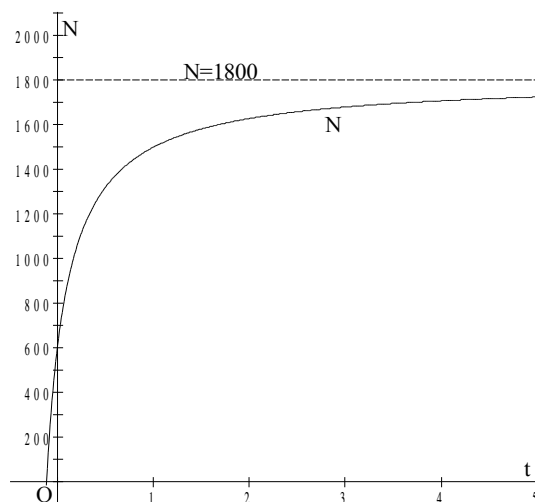
b. Zie figuur.

c. 
$$N = 1760 \Rightarrow 1800 - \frac{1200}{1 + 3t} = 1760 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1200}{1 + 3t} = 40 \Rightarrow 1200 = 40 \cdot (1 + 3t) \Leftrightarrow$$

$$1200 = 40 + 120t \Leftrightarrow 120t = 1160 \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{1160}{120} \approx 9,67 \Rightarrow \text{op de tiende dag.}$$



d. Vierde dag  $\Rightarrow$  We moeten het verschil in toename

zien tussen  $t = 3$  en  $t = 4$   $N(4) \approx 1708$  en  $N(3) \approx 1680 \Rightarrow$  De toename is dus 28 insecten op de vierde dag.

e.  $N = 1680 \Rightarrow t = 3$  (zie onderdeel d) ;  $N = 1745 \Rightarrow 1800 - \frac{1200}{1 + 3t} = 1745 \Leftrightarrow$

$$\frac{1200}{1 + 3t} = 55 \Rightarrow 1200 = 55 \cdot (1 + 3t) \Leftrightarrow 1200 = 55 + 165 \cdot t \Leftrightarrow 165 \cdot t = 1145 \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{1145}{165} \approx 6,94 \Rightarrow \text{het duurt dus } 6,94 - 3 \approx 4 \text{ dagen.}$$

75.

a.  $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$  en  $f = 3 \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v} \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{3} - \frac{1}{v} \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{v}{3v} - \frac{3}{3v} \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{v-3}{3v} \Rightarrow b = \frac{3v}{v-3}$

b. Als  $v$  heel groot is dan gaat  $v$  naar 3 toe  $\Rightarrow$  H.A.  $b = 3$ .  
Als  $v$  is 3 dan is de noemer nul.  $\Rightarrow$  V.A.  $v = 3$ .

c. Als  $b = v$  dan krijgen we :  $b = \frac{3b}{b-3} \Rightarrow b^2 - 3b = 3b \Leftrightarrow b^2 - 6b = 0 \Leftrightarrow b(b-6) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \vee b = 6$

$b = v = 0$  kan niet en als  $b = 6$  dan ook  $v = 6$ .

d. We krijgen dan :  $b = \frac{3v}{v-3}$  en  $\left|\frac{b}{v}\right| = 2 \Rightarrow \frac{b}{v} = 2 \vee \frac{b}{v} = -2 \Rightarrow b = 2v \vee b = -2v \Rightarrow$

$$2v = \frac{3v}{v-3} \vee -2v = \frac{3v}{v-3} \Leftrightarrow 2v^2 - 6v = 3v \vee -2v^2 + 6v = 3v \quad \square \quad 2v^2 - 9v = 0 \vee -2v^2 + 3v = 0 \quad \square$$

$$v(2v-9) = 0 \vee -v(2v-3) = 0 \quad \square \quad v = 0 \text{ (kan niet)} \vee v = 4,5 \vee v = 0 \text{ (k.n.)} \vee v = 1,5.$$